Poggendorff - II, 577f (G.M. Raymond)

LJS BIBLIOTHECA SCHOENBERGENSIS
213
SCHOENBERG DATABASE OF MANUSCRIPTS LJS

Traité

Elémentaire & Synthétique
Des Sections Coniques.

Redigé par Mr M. Miollet, D'aprés
les Leçons de Mr G. M. Raymond.

Chambéry, 1809.

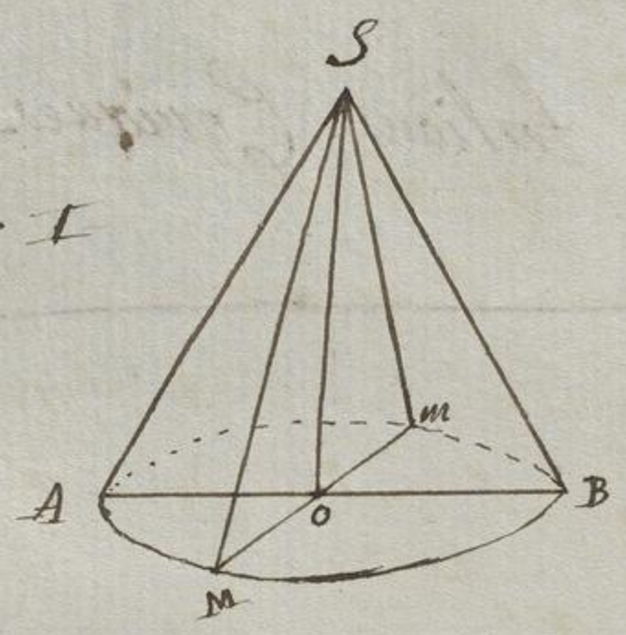
Traité Elémentaire
Des sections Coniques.

La Géométrie analytique nous conduit à la découverte de certaines Courbes que nous appellons, Courbes du second degré; elles jouissent d'un grand nombre de propriétés remarquables, dont la Connaissance est indispensable, à ceux qui veulent etudier avec succès les sciences physico-Mathématiques.

Notre intention est de rechercher ces propriétés, uniquement par la synthèse, en déduisant, ces Courbes du 2.d degré, des différentes manière de Couper une surface Conique. Cette Manière d'obtenir ces Courbes, fait qu'on les appelle aussi. Sections Coniques.

I. La Géométrie élémentaire ne supposant que du Cone droit, nous apprend que, Celui-ci est un Corps engendré par un triangle rectangle qui fait une révolution

fig. I



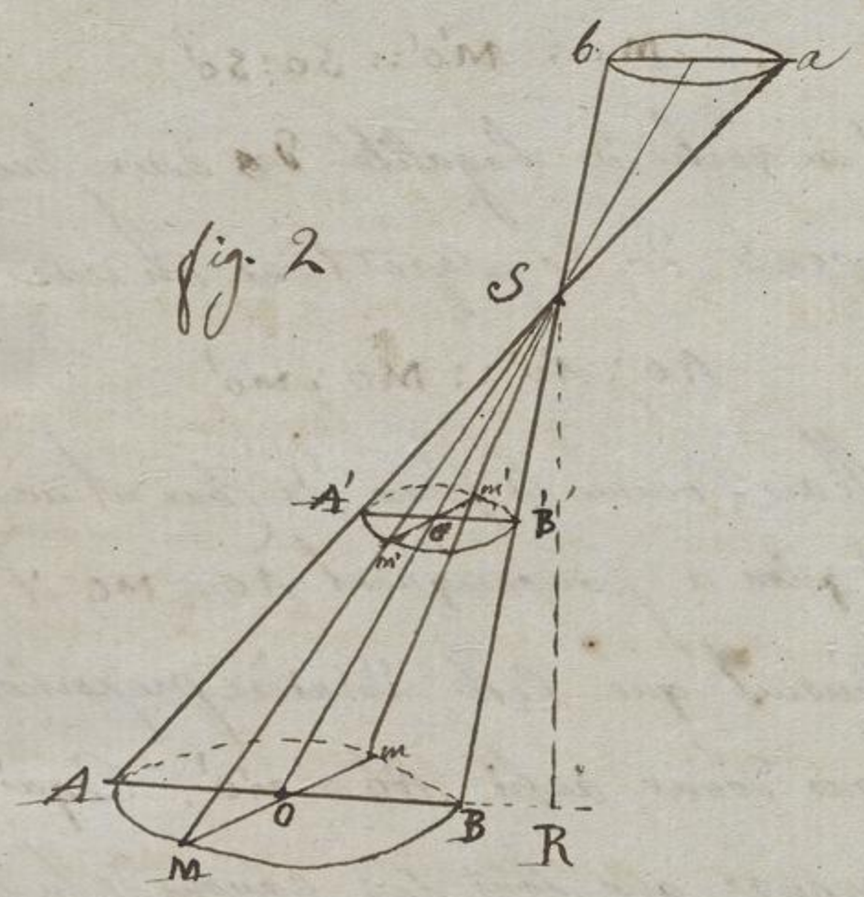
autour de l'un des Côtés de l'angle droit pris pour axe. C'est ainsi que le triangle rectangle SAO tournant (fig. 1) autour du Côté SO, engendre le Cône SAB dont la Base AMBm est un Cercle; il est visible que, si l'on fait passer un plan Coupant par son sommet S, prenant la direction de l'axe SO perpend.e sur la Base et au Centre, la section qui en résultera sera un triangle Composé de deux autres et tous les deux rectangles en O.

§ 2. Nous ne Nous arrêterons pas d'avantage sur cet espèce de Cône, attendu que Nous allons traiter du Cône oblique d'une Manière générale.

Le Cône oblique est engendré par le Mouvement d'une droite qui tourne autour d'un point S et qui est assujétie à toucher Continuellement la Circonférence d'un Cercle, situé dans un plan qui ne passe pas par le point S. La droite SO, que l'on Nomme encore l'axe du Cône, n'est plus perpend.e au plan Circulaire de la Base Comme dans le Cône droit.

fig. 2

fig. 2



L'on Conçoit aisément que si la droite génératrice est prolongée en dessus du point S. (fig. 2), elle décrira dans son mouvement, un Cône Sab parfaitement symétrique au Cône SAB et qui par conséquent jouira des mêmes ~~avan~~ propriétés que celui-ci.

Il est évident que, si l'on fait passer un plan Coupant par le sommet S, et prenant une direction quelconque, la section qui en résultera sera un triangle. (I)

3. Si dans un Cône, à Base Circulaire, on fait passer un plan Coupant parallelement à Cette Base, la section qui en résultera sera ~~un~~ un Cercle.

Pour s'en Convaincre, il n'y a qu'à mener par le point S et o l'axe SO du Cône proposé; et supposer que l'on ait fait passer par Cet axe deux plans quelconques ASB et MSm, dont les intersections respectives avec avec AMBm et A'M'B'm' soient AB et A'B', Mm et M'm'; Car à Cause du parallelisme de ces intersections, les triangles SAO et SA'O' seront semblables et nous donneront:

AO : A'O' :: SO : SO'

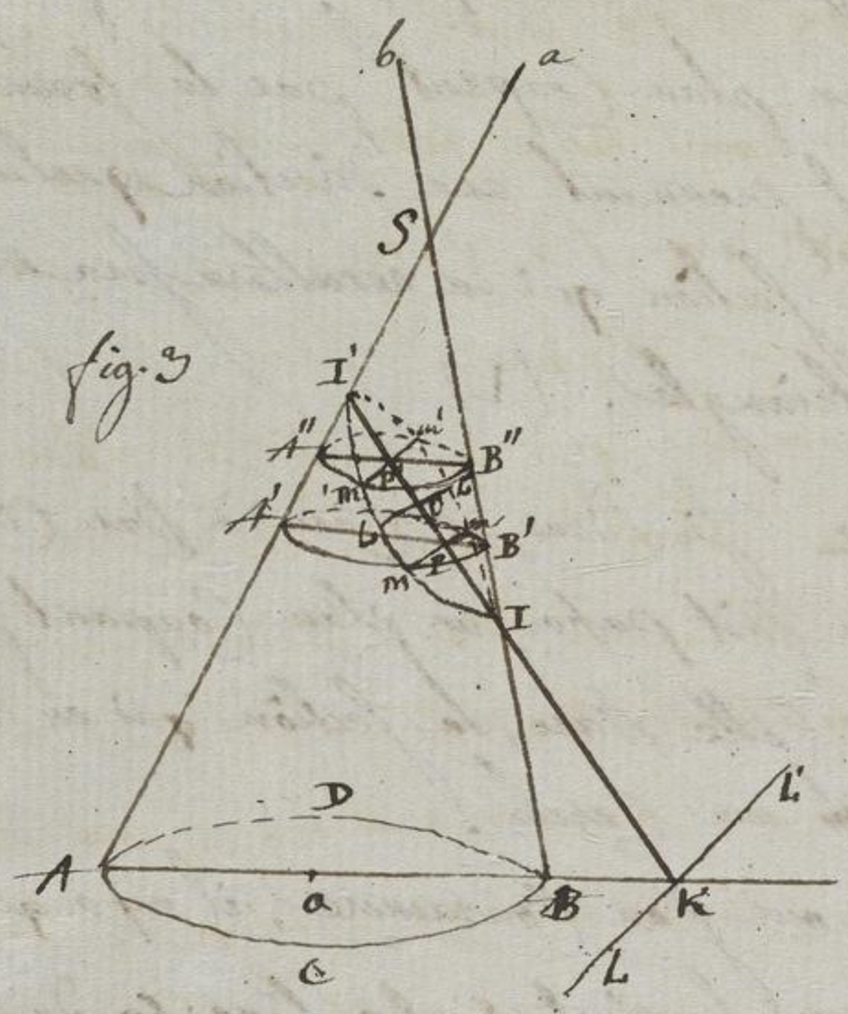
De même les triangles SMO et SM'O nous donnent :

$$MO : M'O' :: SO : SO'$$

et en vertu de l'egalité des deux seconds rapports de ces proportions, on aura :

$$AO : A'O' :: MO : M'O'$$

Mais comme la Base du Cone est un Cercle et qu'on a par conséquent $AO = MO$ il s'ensuit que cette dernière proportion nous donne aussi $A'O' = M'O'$. Ce qui prouve que tous les rayons de la section $A'M'B'm'$ sont égaux, qu'elle est par conséquent un Cercle.



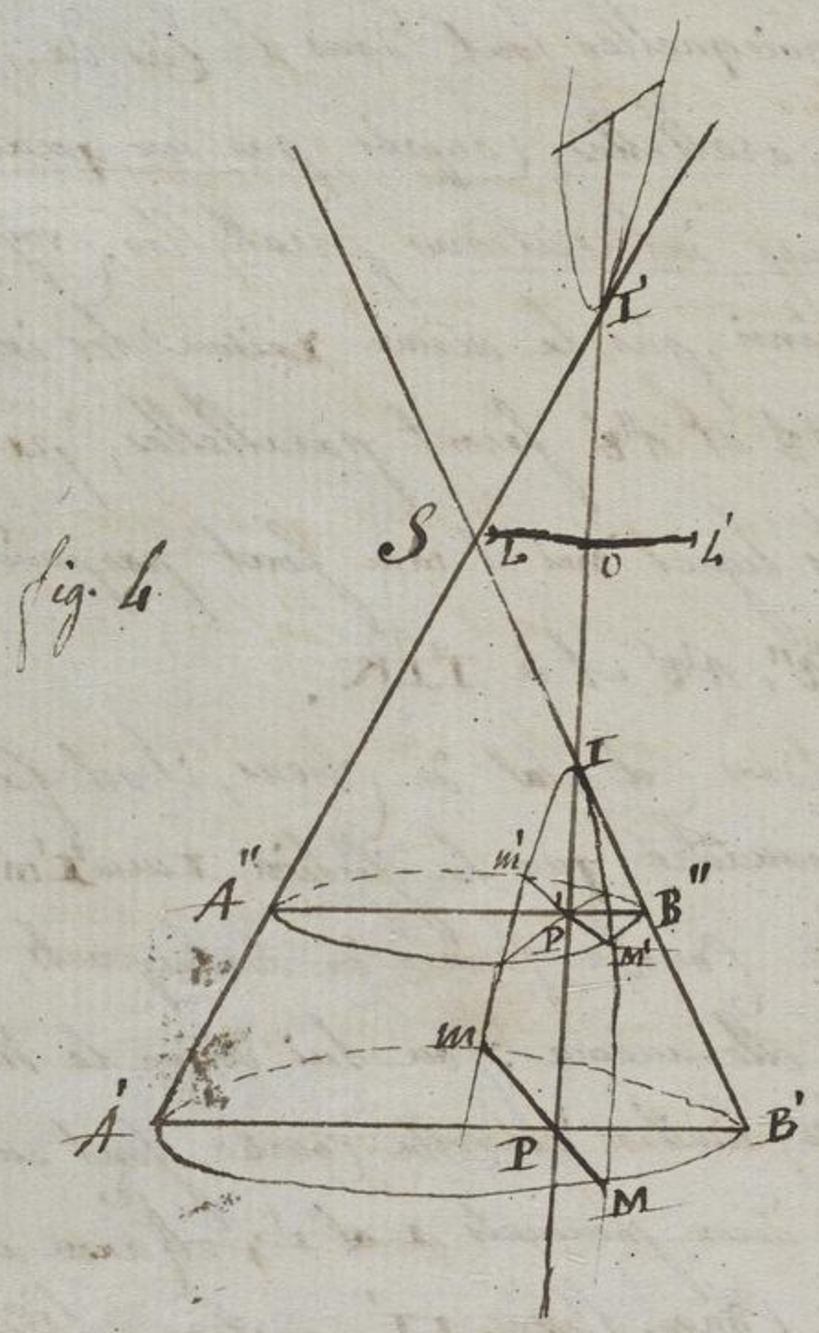
4. Ces préliminaires étant posés, concevons que le Cône SAB (fig. 3) soit coupé par un plan qui rencontre en même tems les deux Côtés SA et SB et qui par conséquent, n'entre point dans le Cone supérieur Sab. soit LL' la commune section du plan coupant avec le plan de la Base ACBD ; imaginons que la ligne AOB, qui détermine la position du plan triangulaire SAB, soit perpend.e sur LL'. C. D. que $BKL = BKL'$, il s'ensuit que IIK est perpend.e sur LL' (Géom. Elémen.), supposons enfin que l'on mène deux

plans coupants AMB'm, A''M'B''m' parallèlement au plan de la base; ils rencontreront le premier plan coupant IMI'M selon les lignes Mm et M'm'; celles-ci seront parallèles à la commune section LL', puisqu'elles sont dans le cas de; trois plans parallèles, coupés par un quatrième, ont leurs intersections parallèles. (voy. Géom. élém.). ainsi, par la même raison les intersections A'B' et A''B' seront parallèles, par conséquent les lignes mm' et mm' sont perpend.^es aux lignes A''B'', A'B' et à IIK.

Dans cet état de choses, il est facile de reconnaître que la section IMmI'm'M, est une courbe fermée de toutes parts, ou rentrante en elle-même: on lui donne le nom d'Ellipse, Les limites de cette courbe sont en même tems les deux sommets I et I'; eu égard à la nature du cône, l'axe II' partage l'Ellipse en deux parties parfaitement symétriques et égales, on lui donne par cette raison le nom de diamètre.

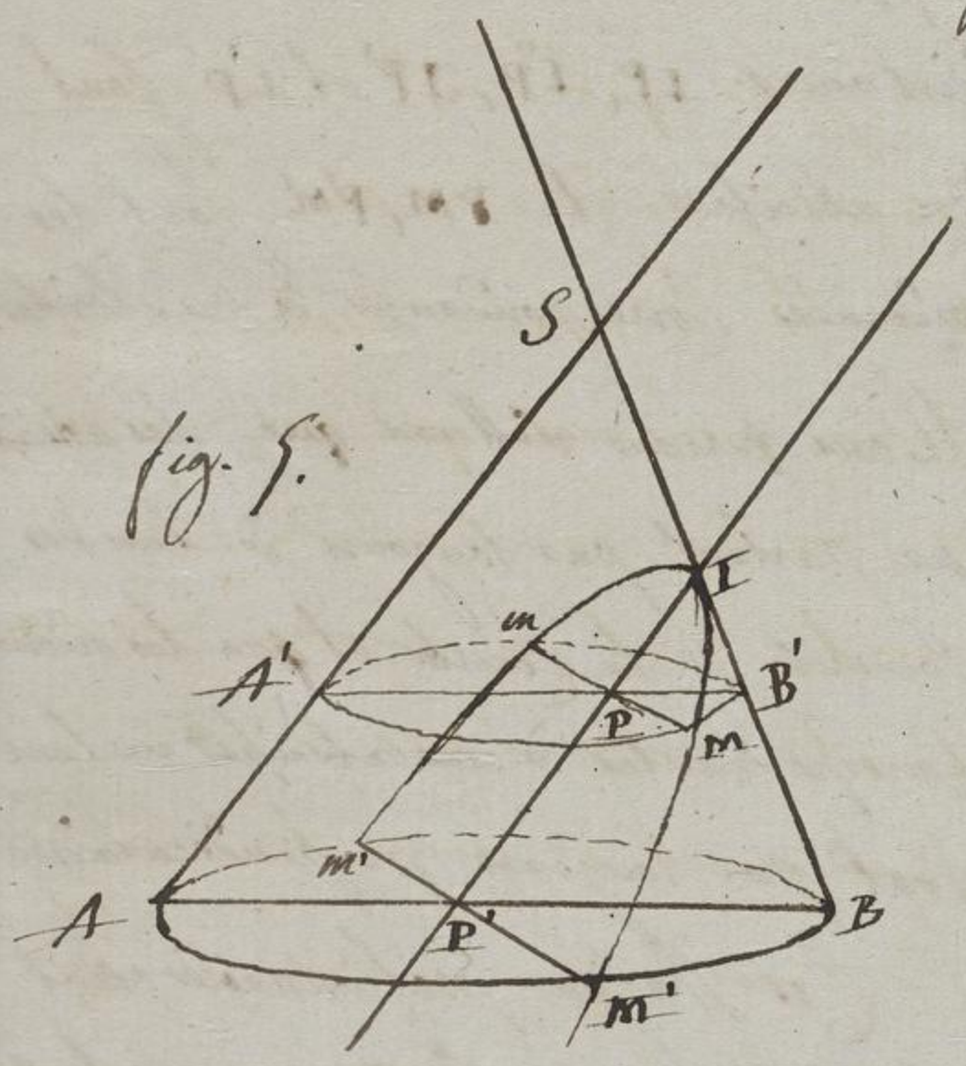
5. observons que si l'on réuni l'angle du sommet du cône avec celui que fait le plan coupant avec l'un des côtés du cône, par exemple, SII', il peut arriver trois cas: ou la somme de ces deux angles sera plus grande que deux angles droits, ou elle sera plus petite ou enfin egale.

par la raison qu'il ne peut se présenter que ces trois Cas, il n'y a que trois Manières, en général de Couper un Cône. Le Cas que Nous venons d'examiner et qui Nous a donné l'Ellipse, Ne Nous a Conduit à le résultat qu'autant qu'on a supposé la somme des deux angles plus petit que deux droit. Nous allons examiner les deux autres.



6. Si le plan Coupant passe de Manière que l'angle qu'il fait avec les des Côtés du Cône, ajouté à celui du sommet soient plus grands que deux droits; Ce plan passera par le Cône (fig. 4) supérieur et ne pourra plus le dégager, Car dans le Cône inférieur il Coupe le Côté SB tandis que dans le supérieur il Coupe le Côté SA, et que les Côtés peuvent être prolongé indéfiniment, il s'ensuit que la section résultante sera une Courbe dont les branches s'étendront à l'infini; elle aura deux sommets I et I'. ou la Nomme hyperbole. L'axe de section II' sera le Diamètre de cette Courbe.

7. Si enfin le plan Coupant fait avec l'un des Côtés du Cône, un angle, qui réuni a Celui du Sommet donne deux droits; Ce plan Coupant N'entrera jamais dans le Cône Supérieur, ~~puisque~~, puisqu'il ~~N~~ sera parallèle à l'autre Côté du Cône; il ne pourra jamais se dégager du Cône inférieur, par conséquent la Courbe (fig. 5.) résultante d'une telle section, sera une Courbe qui N'aura que deux Branches qui s'étendront à l'infini; elle N'aura qu'un Sommet. on la Nomme Parabole.



8. Si Dans les trois sections que Nous venons d'obtenir, fig. 3, 4, 5. Nous faisons passer des plans Coupans parallèlement à la Base de chacun des Cônes, Ces Nouvelles sections Couperont les autres suivant les lignes mm, m'm', de plus elles seront perpend.^es aux diamètres des Courbes II' et aux diamètres des Cercles A'B' et A"B". (4). Ceci s'entend pour les trois figures indiquées, dans lesquelles nous avons employés des Notations à peu près semblables.

9. Dans les sections Coniques, les distances quelconques prises à partir

de l'un des sommets d'une Courbe I ou I' sur l'axe de Cette Courbe se nomment abscisses; et les perpendiculaires qui Correspondent aux extrêmités de ces abscisses, s'appellent ordonnées: Ainsi les distances IP, I'P, IP' et I'P' sont des abscisses et PM, P'M' sont les ordonnées Correspondantes à ces abscisses.

Nous verrons ailleurs que, les abscisses ne partent pas toujours de l'un des sommets de la Courbe et que les ordonnées Correspondantes à ces abscisses ne leur sont pas toujours perpendiculaires.

Ces Notions préliminaires étant suffisantes pour aller en avant, Nous allons en Conséquence Nous occuper des propriétés que jouissent les trois espèces de Courbes que Nous venons de découvrir.

10 Théorème. Dans l'Ellipse et l'hyperbole, les Carrés des ordonnées sont entre eux, Comme les produits respectifs des distances des deux sommets de la Courbe aux pieds de ces ordonnées. C.D Comme

Le produit des abscisses Correspondantes.

Demonstration.

Les figures 3 et 4 vont nous servir à Cet effet et Comme Nous avons employés les mêmes désignations, Ce qui se dira pour l'une sera egalement dit pour l'autre.

Nous savons que dans le Cercle, la perpendre élevée sur le diamètre est moyenne proportionelle entre ses deux segmens; Nous avons en Conséquence dans les Cercles $A'MB'$ et $A''M'B''$:

$$\overline{PM}^2 = A'P \times B'P$$

$$\overline{P'M'}^2 = A''P' \times B''P'$$

Maint.t Les triangles semblables IPB' et $IP'B''$, $I'A''P'$ et $I'A'P$ nous donnent:

$$IP : IP' :: B'P : B''P'$$

$$I'P : I'P' :: A'P : A''P'$$

Multipliant Ces deux proportions par ordre on aura:

$$IP \times I'P : IP' \times I'P' :: B'P \times A'P : B''P' \times A''P'$$

Mettant à la place du 2.d rapport sa valeur Ci dessus, il vient en fin:

$$\overline{PM}^2 : \overline{P'M'}^2 :: IP \times I'P : IP' \times I'P'.$$

proposition qu'il fallait demontrer.

II. Les abscisses et les ordonnées ont de Certaines dépendances réciproques entre elles, qui font telles que, l'une ne peut pas varier sans que

L'autre Change en même tems; Nous représenterons donc ces lignes variables par x et y. C. D. x les abscisses et y les Coordonnées Correspondantes aux abscisses x; et si x' designe une autre abscisse quelconque, y' son ordonnée Correspondante, la proposition du Numéro précédent pourra s'exprimer généralement; ainsi en représentant le diametre II' par $2a$ on aura:

$$y^2 : y'^2 :: x(2a-x) : x'(2a-x')$$

Cette propriété étant applicable à tous les points de la Courbe, si l'on prend une abscisse qui soit égale à la moitié de l'axe $II' = 2a$ fig. 3. et que l'on représente l'ordonnée Correspondante par $b = ol$ on aura:

fig. 3

$$y^2 : b^2 :: x(2a-x) : a^2$$

de laquelle on tire:

$$a^2y^2 = b^2x(2a-x)$$

d'où $y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2}$.

equation qui, Comme Nous le verrons dans la suite, renferme toutes les propriétés de l'Ellipse.

par la raison que Nous Nommons la ligne II' le grand axe ou le diametre Nous Nommerons la ligne LL' second axe ou second diametre et Comme il est le double de

l'ordonnée du Centre on le représentera par 2b; par Conséquent les lettres a et b représentent les demis axes ou les demis diamètre de l'Ellipse, et Comme ils sont perpendiculaires l'un sur l'autre ~~Cela fait~~ au Centre, l'equation que Nous venons d'obtenir, s'appelle l'equation aux axes de l'Ellipse.

12. Nous obtiendrons aussi une equation pour l'hyperbole, par un raisonnement semblable; Car si nous prenons une abscisse qui soit egale à la moitié du

fig. 4 diamètre II' fig. 4, sa double ordonnée Correspondante à l'extrémité o de cette abscisse, sera aussi le second axe de l'hyperbole, on le représente par 2b; ainsi on a, $b = \frac{1}{2} LL' = oL = oL'$, $a = oI = oI'$.

Maint.t si $x = I'P$, $y = PM$ on aura $IP = I'P - II' = (x - 2a)$; de même si $x' = I'P'$, $y' = P'M'$ on aura $IP' = x' - 2a$ et la proposition du N.° 10 donnera;

$$y^2 : y'^2 :: x(x-2a) : x'(x'-2a)$$

particularisant Cette proportion pour le Centre Nous aurons:

$$y^2 : b^2 :: x(x-2a) : a^2$$

qui donne: $a^2y^2 = b^2x(x-2a)$

d'où enfin: $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - 2ax}$

equation dans laquelle a et b représentent aussi les demis axes ou les demis diamètres de l'hyperbole; elle renferme les propriétés de cette courbe, comme nous le verrons, et comme les axes sont supposés perpendiculaires entre eux, nous la nommerons aussi, <u>l'equation aux axes de l'hyperbole</u>; en la comparant avec celle de l'ellipse, on voit quelle en diffère, qu'en ce que la quantité qui est sous le radical a changé de signes.

<u>13.</u> <u>Théoreme</u>. Dans la parabole, les quarrés des ordonnées ~~sont entre eux~~ comme les abscisses correspondantes aux pieds de ces mêmes ordonnées.

Demonstration.

fig. 5 Si l'on coupe le cône SAB (fig. 5) par un plan parallèle à SA et que l'on fasse passer un second plan coupant parallèlement à sa base ~~du cône~~ il en résultera deux triangles semblables IPB' et IP'B qui nous donneront:

$$IP : IP' :: B'P : BP'.$$

Comme $AP' = A'P$ et que nous sommes

autorisés à Multiplier les deux termes d'un rapport sans changer sa valeur, Nous multiplierons par Conséquent ~~les deux~~ l'antécédent du second rapport par AP et son Conséquent par AP', et Nous aurons :

$$IP : IP' :: B'P \times AP : BP' \times AP'$$

Mais Nous avons d'ailleurs :

$$PM^2 : P'M'^2 :: B'P \times AP : BP' \times AP'$$

Donc : $PM^2 : P'M'^2 :: IP : IP'$

14. Généralisant cette proposition en représentant par y, y' deux ordonnées quelconques et par x, x' les abscisses Correspondantes à ces ordonnées, on a :

$$y^2 : y'^2 :: x : x'$$

ou $y^2 : x :: y'^2 : x'$

d'où $\frac{y^2}{x} = \frac{y'^2}{x'}$

equation qui nous fait voir que le rapport qu'il y a entre les abscisses et les ordonnées est un rapport Constant; Nous pourrons en Conséquence le représenter par un facteur indéterminé tel que p et poser en général :

$$\frac{y^2}{x} = p$$

$$y = \sqrt{px}$$

equation qui appartient exclusivement à la parabole, Comme nous le verrons.

15. il est facile de voir ce que signifie le facteur p qui est sous le radical, car en élevant au quarré l'equation, on a

$$y^2 = px$$

d'où $x : y :: y : p$

ce qui nous apprend que c'est une troisieme proportionnelle à une abscisse quelconque et au carré de son ordonnée correspondante. ||

|| Cette ligne se nomme parametre

16. si l'on reprend l'équation de la parabole

$$y = \sqrt{px}$$

et que l'on substitue à x une valeur quelconque, l'on voit qu'il en résultera une valeur correspondante pour l'ordonnée. Car, si par exemple, on fait $x = p$. l'equation donne $y = p$. C.D. que si l'on prend une abscisse égale au parametre, l'ordonnée qui en résulte aura la même valeur. Cette double ordonnée ou, ce qui est la même chose, la corde MM vaudra $2p$ en supposant que $IP = x = p$.

Maint.t, si nous voulons obtenir une corde qui soit egale au parametre, il n'y a qu'à mettre dans l'equation de la parabole, à la place de y sa valeur pour ce cas, qui est $y = \frac{1}{2}p$; dégager x dans cette equation, et l'on verra quelle est l'abscisse qu'il faudrait substituer

dans l'équation, pour obtenir une ordonnée qui soit égale à la moitié du parametre; ou une Corde qui fera le double de cette ordonnée et qui vaudra le parametre. Mettant donc à la place de y sa valeur on aura :

$$\frac{1}{2}p = \sqrt{xp}$$

$$\frac{1}{4}p^2 = xp$$

$$x = \frac{1}{4}p$$

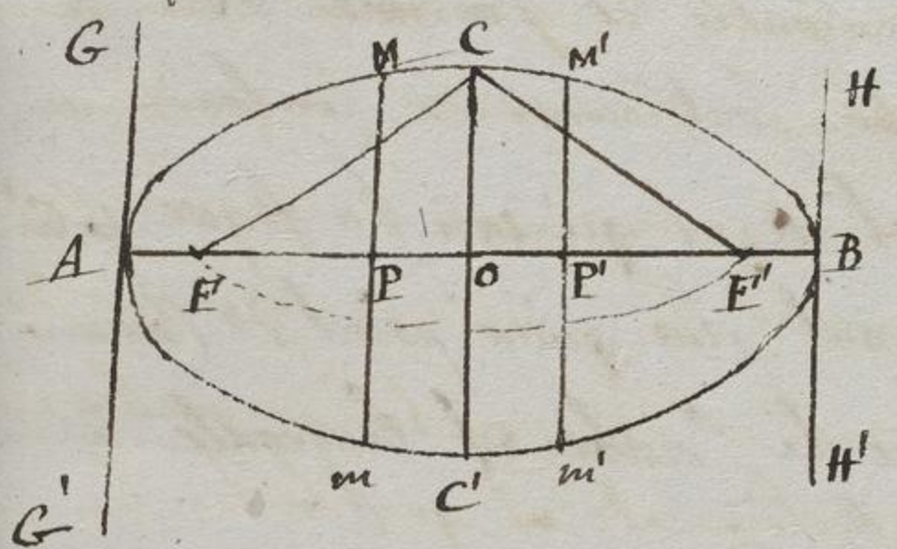
Cette dernière equation nous apprend que, si l'on substitue à x une valeur egale au quart du parametre, l'ordonnée correspond.te vaudra $\frac{1}{2}p$ et le double de cette ordonnée vaudra p, C. D. le parametre.

17. Si dans la parabole, l'on prend une abscisse égale au quart du parametre, l'extrémité de Cette abscisse s'appelle foyer. d'après ce que nous venons de voir l'ordonnée élevée à Ce point vaudra la moitié du parametre; et le double de Cette même ordonnée, ou la Corde, fera le parametre. ainsi dans la parabole, l'abscisse du foyer est egale au quart du parametre. reciproquement, le parametre dans la parabole vaut quatre fois l'abscisse du foyer ou autrement, la double ordonnée du foyer,

18. Les differentes Manieres de Couper le Cone, Nous ayant fait découvrir trois especes de Courbes, que Nous appellons Sections Coniques; il s'agit Maint.t d'etudier leurs proprietés, en alyssant les équations que Nous venons d'obtenir. Nous verrons, Comme Nous l'avons annoncé, que ces equations sont vraiment la peinture algebrique, des Carracteres des Courbes auxquelles elles appartiennent; et que toutes les hypotheses que l'on peut faire dans les equations sont Confirmées par la Nature de la Courbe; et que, réciproquement, toutes les proprietés que l'on peut prévoir dans la Courbe sont renfermées dans les equations.

Pour plus de simplicité, Nous detacherons les Courbes du Cone pour les rapporter sur un plan; et Nous diviserons Nos recherches en trois Chapitres, en raison des trois Courbes: Le premier, sera pour l'Ellipse; le second, pour l'Hyperbole; et le troisième enfin, pour la parabole.

fig. 6.



Chapitre premier.

De l'Ellipse.

12 Soit l'ellipse (fig. 6), dans laquelle les points A et B sont les sommets, AB et CC' les diamètres. L'équation de la Courbe étant :

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$$

a représente le demi-diamètre OB ou OA; $b = OC = OC'$; x représente une abscisse quelconque telle que AP' ou AP et y les ordonnées Correspondantes P'M' ou PM.

En examinant l'équation, on voit que pour chaque abscisse que l'on pourra prendre, il en résultera deux valeurs égales et de signes Contraires pour l'ordonnée. N'oublions pas que Nous faisons partir les abscisses du sommet A. Si par exemple, nous prenons une abscisse egale à $AO = a$ on peut déjà prévoir à l'inspection de la figure, que l'ordonnée qui Correspondra à cette abscisse sera egale au demi-secondaire : en effet, en substituant dans l'équation, a, à la place de x on a $y = \pm b = \pm OC$.

Si nous faisons $x = 0$, Ce qui signifie que nous ne quittons pas le point A, puisque

puisque nous ne prenons point d'abscisse, on voit qu'il n'y a lieu à élever aucune ordonnée à ce point, comme l'équation va le prouver; Car si $x = 0$ on trouve $y = \pm 0$. C. D. que les points de rencontre de l'ordonnée avec la Courbe sont venus se Confondre au point A et qu'ainsi la ligne GG' N'ayant plus qu'un point de Commun avec la Courbe est tangente à Celle-ci.

De même si l'on prend une abscisse égale au diamètre $AB = 2a = x$ on aura encore $y = \pm 0$; Ce qui doit être puisqu'au pt B on ne peut point élever d'ordonnée; la ligne HH' est donc tangente à la Courbe au point B.

2°. Il est donc bien prouvé que, l'équation $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$ appartient à l'ellipse dans le Cas où les abscisses partent de l'un de ses sommets. Voyons quelle forme prendrait ~~Cette equation~~, si nous faisons partir les abscisses du Centre O de la Courbe.

Nous pouvons nous y prendre de deux Manières:

1° Si nous supposons que les abscisses partent toujours du sommet A, Nous aurons en vertu du N° 10 :

$$y^2 : y'^2 :: x(2a-x) : x'(2a-x')$$

pour que les abscisses partent du point O il faudra faire $OP = x$ et on aura

$$AP = AO - OP = a - x$$

$$BP = BO + OP = a + x$$

de même si $OP' = x'$ on aura :

$$AP' = AO + OP' = a + x$$

$$BP' = BO - OP' = a - x.$$

La proportion ci dessus se transforme donc en celle-ci :

$$y^2 : y'^2 :: a^2 - x^2 : a^2 - x'^2$$

particularisant cette dernière proportion pour le centre on aura

$$y^2 : b^2 :: a^2 - x^2 : a^2$$

$$a^2 y^2 = b^2 (a^2 - x^2)$$

enfin. $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

équation qui appartient à l'ellipse dans le cas où les abscisses partent du centre. Il ne s'agira donc que de déterminer d'avance à quel point les abscisses prennent Naissance, pour savoir laquelle de ces deux equations on devra employer dans la pratique.

2° Si nous traduisons les anciennes abscisses en Nouvelle et qu'on substitue leurs valeurs dans l'équation au sommet de l'ellipse il en résultera celle au centre. en effet, faisons les Nouvelles abscisses $x' = OP$. on a :

$$x' = OP = AO - OP = a - x$$

rapprochant, $x' = a - x$

d'où $x = a - x'$

substituant dans l'equation $y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$

il viendra :

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{2a(a-x') - (a-x')^2}$$

effectuant les opérations indiquées sous le radical et supprimant les accents, on trouvera :

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

21. Il est facile de se convaincre que cette equation appartient vraiment à l'Ellipse, en la discutant d'une Maniere analogue à celle que nous avons faite pour l'equation au sommet. Car, si $x = 0$, les abscisses partant du Centre o de la Courbe, l'on voit que l'ordonnée Correspondante à cette supposition est le demi-second axe ; en effet l'equation nous donne $y = \pm b = \pm oc$

Si l'on prend une abscisse egale au demi-grand axe, on doit tomber sur les deux

sommets de l'Ellipse; l'équation repond parfaitement à cette hypothèse, car, $x = a$, ~~te~~ donne $y = \pm 0$ c'est-à-dire qu'aux points A et B il n'y a lieu à aucune ordonnée, par conséquent c'est le cas de tangence, puisque les droites GG' et HH' n'ont plus qu'un point de commun avec la Courbe.

observons, en passant, que nous pouvons faire $x = \pm a$, par la raison que x dans l'équation est un Carré.

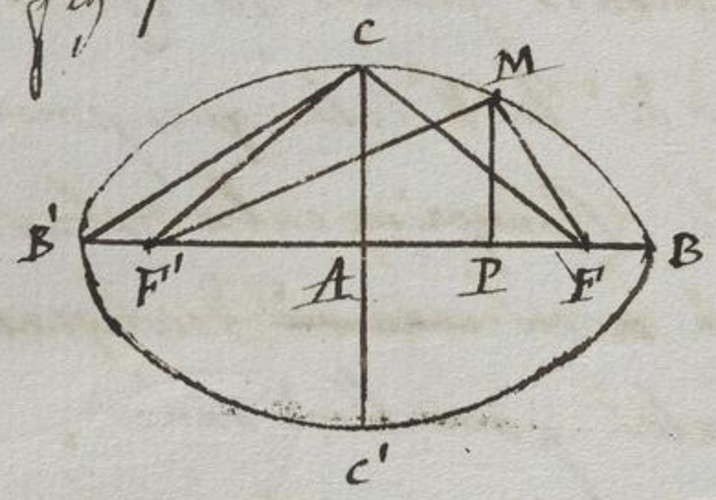
enfin, si l'on faisait $x > a$. C. D. si l'on prenait une abscisse plus grande que le demi-grand axe, L'equation nous donnerait une valeur imaginaire pour l'ordonnée; Cela Nous apprend donc que pour une telle abscisse, il n'y a point d'ordonnée; — effectivement, c'est en vain qu'à l'extrémité de cette abscisse on elevera une ordonnée, elle ne rencontrera jamais la Courbe.

Je Conclus de tout cela que, pour une abscisse Comprise entre $x = 0$ et $x = \pm a$ on aura ~~une~~ deux valeurs réelles et égales pour l'ordonnée.

22. L'ellipse a aussi des foyers; pour les déterminer, on prend la moitié du grand axe pour rayon et du sommet du petit axe

Comme Centre on décrit un arc de Cercle qui Coupera le premier en deux points F et F' qu'on appelle les foyers. La distance OF ou OF' s'appelle excentricité. pour que Celle-ci fut Nulle dans l'ellipse, il faudrait que le second axe fut égal au premier, parcequ'alors, si on voulait determiner les foyers par le procédé que nous venons d'indiquer, l'ouverture du Compas, tomberait parfaitement au Centre de l'ellipse : il est aisé de reconnaître alors que la Courbe serait un Cercle. Nous pouvons donc dire que le Cercle, est une ellipse dont les deux foyers se sont réunis au Centre, C. D. dont l'excentricité est Nulle ; et qu'ainsi il en est un Cas particulier.

fig 7.



23. si d'un point quelconque de la Courbe on mène deux droites aux foyers (fig. 7) F et F', Ces lignes seront ce qu'on appelles des rayons vecteurs. d'après la définition des foyers, l'on voit que si l'on tire deux rayons vecteurs à l'extremité du petit axe, leur somme sera égale au grand. C. D. quon aura :

$$FC + F'C = BB' = 2a$$

24. Théorème. Dans l'Ellipse, si de l'un de ses points quelconque, on mène deux rayons vecteurs, leur somme sera constamment égale au grand axe.

Demonstration.

Soit le point M duquel partent les rayons vecteurs FM et F'M. Nous ferons $AF = AF' = c$; $AC = AC' = b$; $AB = AB' = a$. Le triangle rectangle CAF nous donne :

$$CF^2 = AC^2 + AF^2$$

$$\text{ou} \quad a^2 = b^2 + c^2$$

$$\text{d'où} \quad c^2 = a^2 - b^2$$

enfin nous avons encore :

$$FP = AF - AP = c - x$$

$$F'P = AF' + AP = c + x.$$

Maint.t les triangles rectangles MFP et MF'P, nous donneront :

$$FM = \sqrt{FP^2 + PM^2}$$

$$F'M = \sqrt{F'P^2 + PM^2}$$

substituant les notations ci-dessus,

$$FM = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}$$

$$F'M = \sqrt{(c+x)^2 + y^2}$$

élevant au carré ces deux équations et mettant à la place de y^2 sa valeur prise dans l'équation de la courbe, il viendra :

$$\overline{FM}^2 = c^2 - 2cx + x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

$$\overline{F'M}^2 = c^2 + 2cx + x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

réduisons les second membres en fractions et

Mettons à la place de c^2 sa valeur a^2-b^2 on trouvera :

$$\overline{FM}^2 = \frac{a^4 - a^2b^2 - 2a^2cx + a^2x^2 + a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}$$

$$\overline{F'M}^2 = \frac{a^4 - a^2b^2 + 2a^2cx + a^2x^2 + a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}$$

simplifiant :

$$\overline{FM}^2 = \frac{a^4 - 2a^2cx + (a^2-b^2)x^2}{a^2}$$

$$\overline{F'M}^2 = \frac{a^4 + 2a^2cx + (a^2-b^2)x^2}{a^2}$$

Mettons à la place de (a^2-b^2) sa valeur c^2.

$$\overline{FM}^2 = \frac{a^4 - 2a^2cx + c^2x^2}{a^2}$$

$$\overline{F'M}^2 = \frac{a^4 + 2a^2cx + c^2x^2}{a^2}$$

Les Numérateurs étant des quarrés parfaits ainsi que les dénominateurs, on pourra donc extraire la racine de ces expressions,

$$FM = \frac{a^2 - cx}{a}$$

$$F'M = \frac{a^2 + cx}{a}$$

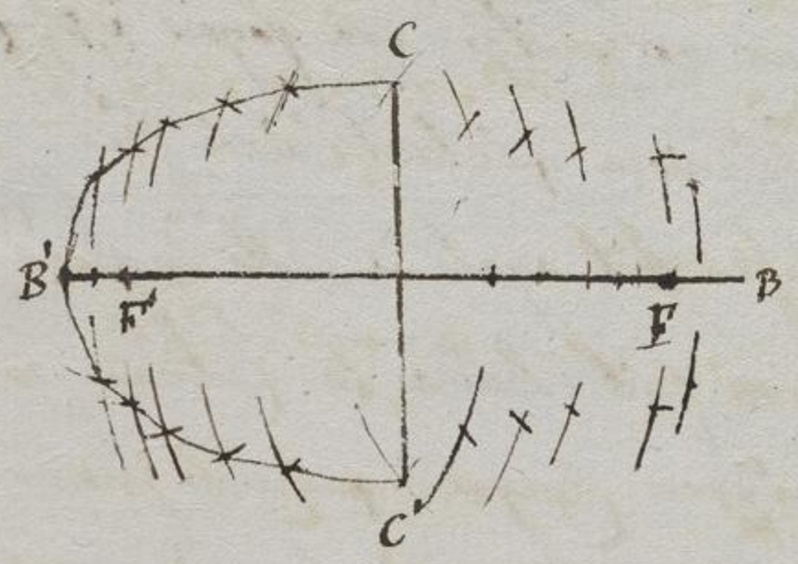
effectuant la division autant que possible Nous aurons enfin :

$$FM = a - \frac{cx}{a} \text{ et } F'M = a + \frac{cx}{a}.$$

Telles sont les expressions des deux rayons vecteurs ; si on les ajoute ensemble, Cela Completera la proposition ennoncée. Car

$$FM + F'M = a - cx + a + cx = 2a.$$

27. Cette Nouvelle propriété, que Nous venons de prouver pour toutes les Ellipses,



Nous fournit un Moyen de Construire Cette Courbe par une suite de points,

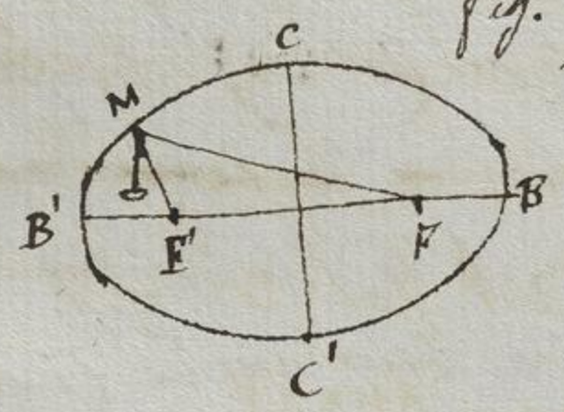
soit les axes BB' et CC', au moyen desquels on trouvera les foyers (N.° 22). On prendra, à volonté, une ouverture de Compas moindre que le grand axe, et de l'un des foyers, Comme Centre, on décrira deux arcs de Cercles, l'un en dessus et l'autre en dessous; ensuite l'on prendra encore une ouverture egale au reste du grand axe, C. D. égale à la différence entre le grand axe et le premier rayon, et de l'autre foyer Comme Centre on décrira encore deux arcs de Cercles qui Compseront les deux 1.ers; l'on aura ainsi des points qui appartiendront à l'ellipse, puisque si de ces points on mene des rayons vecteurs, leur somme sera égale au grand axe. en répétant Cette opération avec plusieurs ouvertures de Compas, on obtiendra une suite de points, lesquels étant joints donneront l'Ellipse demandée.

L'on Conçoit que la Courbe sera d'autant plus exacte que l'on prendra des points prés les uns des autres.

Ce procédé est le plus exact que l'on Connaisse, pour Construire une Ellipse dans la pratique;

26. Si l'ellipse que l'on veut Construire doit être fort grande, on peut la

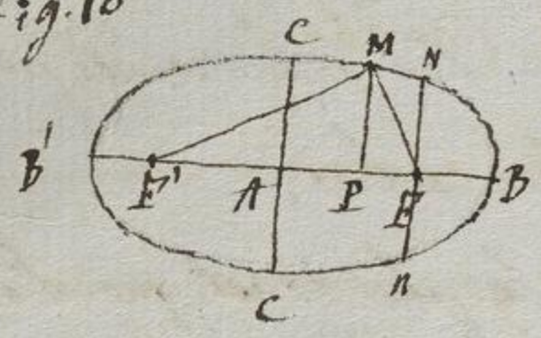
fig. 9



Déterminer par un Mouvement Continu, en prenant un Cordeau dont on fixe les deux extrémités aux foyers F, F'; ~~et~~ de telle Maniere qu'étant ainsi fixé, sa longueur soit egale à Celle du grand axe. alors, on fait tendre le Cordeau par le moyen d'un Crayon que l'on promène autour des foyers, ~~et~~ le Cordeau obeissant au mouvement du Crayon et Conservant toujours sa même longueur, il s'ensuit que l'ellipse sera tracée lorsqu'on sera arrivé au point d'où l'on est parti.

Ce procédé offre des inéxactitudes, soit à Cause de l'elasticité du Cordeau, soit à Cause de la difficulté de tenir le Crayon toujours dans la même position; aussi, on ne s'en sert que lorsqu'il s'agit de tracer des Ellipses fort grandes sur le terrein.

fig. 10



27. L'on peut encore Construire une Ellipse, au moyen des expressions analytiques des rayons vecteurs; ~~et tirer l'avantage d'avoir un rayon vecteur~~ Car, reprenons les valeurs trouvées au N.° 24. qui sont

$$FM = a - \frac{cx}{a}, \quad F'M = a + \frac{cx}{a},$$

au moyen d'une abscisse donnée, on déterminera l'un de ces rayons, et alors

il sera facile de trouver le second, lorsqu'on connaîtra l'un des deux. Supposons donc que l'on cherche le plus petit rayon FM (fig. 10) et qui correspond à une abscisse AP par exemple, ~~en supposant~~ l'expression de ce rayon devient pour ce cas :

$$FM = AB - \frac{AF \times AP}{AB}$$

Cherchant une 4e proportionnelle aux trois termes AB : AF :: AP : m et la soustrayant du demi grand axe AB, on aura le rayon vecteur FM. Si l'on voulait le grand, au lieu de soustraire la 4e proportionnelle de AB on l'ajouterait. Connaissant un rayon vecteur relatif à une abscisse donnée, au moyen de laquelle on a trouvé ce rayon, on élevera une perpendiculaire à l'extrémité de l'abscisse ; et du foyer comme centre, avec un rayon égal à celui qu'on aura trouvé, on décrira un arc de cercle qui coupera ~~ainsi~~ la perpend.e et nous donnera ainsi un point de la courbe.

En répétant cette opération pour chaque abscisse que l'on prendra, on aura autant de points de la courbe que l'on voudra.

28. Il est facile de reconnaître l'analogie qu'il y a entre les rayons vecteurs et les ordonnées d'une courbe, ~~puisque~~ les premiers varient ~~aussi~~ à mesure que l'on change d'abscisses, et pour chaque valeur que l'on donne à celles-ci, il en résulte des rayons vecteurs ~~relatifs à et correspondants~~ qui leurs sont relatifs. La différence qu'il y a, c'est, que les rayons vecteurs ne sont pas parallèles entre eux, comme les ordonnées, et qu'ils changent sans cesse de direction. Mais cela n'empêche pas qu'on puisse très bien les considérer comme des ordonnées partant du foyer F. Si donc, au lieu de prendre les abscisses à partir du p.t A, on les faisait prendre ~~à partir~~ au même point F que les nouvelles ordonnées, le foyer serait ainsi une ~~nou~~ origine de coordonnées nouvelles.

Faisons donc ce changement. pour cela nous ferons la nouvelle abscisse $FP = x'$. et nous aurons $AP = AF - FP = c - x'$. représentant le rayon FM par z et mettant, à la place de x, sa valeur $c - x'$, dans l'équation $FM = a - \frac{cx}{a}$ on aura :

$$z = \cancel{a} \frac{c(c-x')}{a}$$

$$z = \frac{a^2 - c^2 + cx'}{a}$$

mettant à la place de $a^2 - c^2$ sa valeur b^2

on a : $z = \frac{b^2 + cx'}{a}$

Telle est l'équation propre à nous donner les relations qu'il y a entre les variables x' et z; et comme celles-ci partent d'un même point F, on la nomme pour cette raison équation polaire de l'Ellipse.

29. Nous allons lui faire subir une autre forme. le triangle MFP nous donne en vertu d'un théorème de trigonométrie :

$$R : \left\{\begin{matrix}\sin FMP \\ \cos MFP\end{matrix}\right\} :: FM : PF.$$

représentant l'angle MFP par φ on aura :

$$R : \cos\varphi :: z : x' \text{ d'où } x' = z\cos\varphi.$$

en reprenant l'équation polaire et remplaçant x' par sa valeur on trouve :

$$z = \frac{b^2 + cz\cos\varphi}{a}$$

Dégageant z qui entre dans les deux membres de l'équation, on aura enfin :

$$z = \frac{b^2}{a - c\cos\varphi}$$

Telle est la forme sous laquelle on se sert de l'équation polaire. Nous voyons qu'ici, l'abscisse x' a été remplacée par le Cosinus de l'angle que fait le rayon vecteur avec l'axe des abscisses; il est facile de reconnaître que tout ce que Nous avons dit dans les Numéros 25, 26, 27, 28 et 29 ne sont que des Conséquences déduites du théorème N° 24. le N° 30 qui suit fait encore suite à ces Corollaires.

30. Le rayon vecteur $FM = z = \frac{a^2 - cx}{a}$; x désigne une abscisse quelconque ; si donc on élève une ordonnée au foyer F, elle aura pour abscisse $x = c$; Ce sera encore un rayon vecteur qui aura pour expression :

$$FN = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

puisque $a^2 - c^2 = b^2$. (N.° 24)

l'ordonnée du foyer vaut donc $\frac{b^2}{a}$ par conséquent son double sera $\frac{2b^2}{a}$. Cette corde s'appelle paramètre de l'Ellipse.

la valeur du paramètre $\frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2}{2a}$ nous donne $2a : 2b :: 2b : p$

p désignant la 3.e proportionnelle ; nous voyons que la double ordonnée du foyer, ou, le paramètre, est égal à une 3.e proport. aux axes de l'ellipse, dont le petit axe est pris pour terme Moyen.

31. Les equations, au sommet, et au Centre de l'ellipse :

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

peuvent prendre une Nouvelle forme en y introduisant le paramètre. Car si nous divisons l'équation $p = \frac{2b^2}{a}$ par $2a$, on aura, $\frac{2b^2}{2a^2} = \frac{p}{2a} = \frac{b^2}{a^2}$.

Nous pouvons donc remplacer le facteur $\frac{b^2}{a^2}$ par $\frac{P}{2a}$ et nous aurons ;

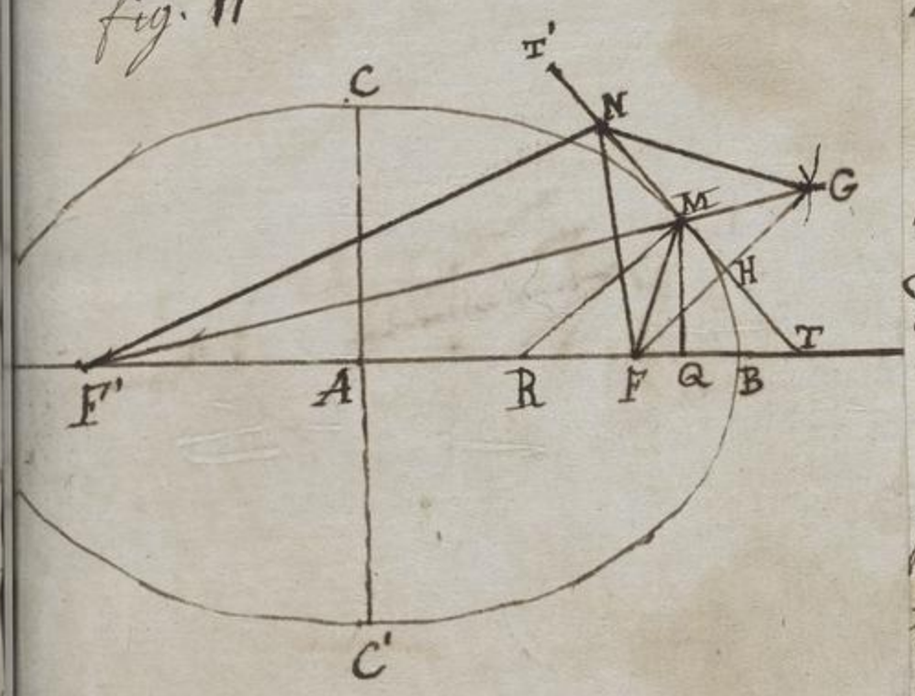
$$y^2 = \frac{P}{2a}(2ax - x^2)$$

$$y^2 = \frac{P}{2a}(a^2 - x^2)$$

pour Nouvelles équations de l'Ellipse, lorsque y fait intervenir le paramètre.

32. D'un point donné sur l'Ellipse, mener une tangente à cette Courbe.

Soit le point M ; ayant mené les deux rayons vecteurs FM et F'M. on prolongera celui-ci, d'une quantité MG = FM ; on joindra les points F' et G ; et du point M l'on abaissera la perpendiculaire MT sur FG qui sera la tangeante demandée.



Cela sera évident si Nous démontrons qu'il n'a que le point M de Commun avec la Courbe.

Supposons donc un point N pris en dessus ou en dessous du p.t M. ayant mené les rayons vecteurs F'N, FN et joint les points N et G, Nous aurons.

$$F'N + NG > F'M + MG$$

à Cause que MG = FM et que NG = FN

on aura

$$F'N + FN > F'M + FM.$$

Mais, $F'M + FM = BB' = 2a$, (N.° 23) donc :

$$F'N + FN > 2a.$$

Cette Condition Nous apprend que le point

N est dehors de la Courbe, et Comme Ce raisonnement peut s'appliquer à tous les points pris en dessus et en dessous et aussi près qu'on voudra du point M, il s'ensuit que la ligne TT' est la tangente demandée.

33. 1er Corollaire. Le triangle FMG étant isocèle donne GMH = FMH et Comme GMH = F'MT' Comme opposés par le sommet il s'ensuit 1.° que l'angle FMG formé par un rayon vecteur et le prolongement de l'autre, est partagé en deux parties égales par la tangente. 2.° que les angles FMT, F'MT' formés par la tangente et les deux rayons vecteurs, sont égaux.

34. 2e Corollaire. 1.° Nous Nommons tangente la partie MT, et sous-tangente la portion QT Comprise entre le pied de l'ordonnée du point de tangence et le point où la tangente rencontre l'axe des abscisses. 2.° Nous appellons Normale la ligne MR menée perpendi.t à la tangente, et au point de tangence, et sous-normale la ligne Comprise entre le pied de l'ordonnée du point de tangence et le point où la Normale rencontre l'axe des abscisses. C'est QR.

Les angles IMR, I'MR sont égaux comme droit; si l'on retranche de part et d'autre les angles égaux FMI, F'MI', le restes FMR, F'MR sont encore égaux; Cette propriété énoncée en termes généraux Nous apprend que, la Normale divise en deux angles égaux Celui que forment les rayons Vecteurs entre eux.

3°. D'un point donné hors de l'Ellipse, mener une tangente à la Courbe?

Soit le point N du quel on veut mener la tangente, (fig. 11); du foyer F' avec un rayon égal au grand axe BB' on décrira un arc de Cercle ~~qui~~ du Coté dont on veut mener la tangente; ensuite du point N avec un rayon FN on décrira un second arc de Cercle qui Coupera le premier au point G; joignant les points F' et G Cela nous donnera un point M sur la Courbe; Menant par ce point et le point donné N une ligne MN elle sera la tangente demandée.

En effet, ayant tiré le rayon vecteur FM et la ligne FG, Nous avons:

$$\left.\begin{array}{l} F'M+MG=2a \\ F'M+MF=2a \end{array}\right\} \text{d'où } MF=MG.$$

Mais Nous avons aussi FN=NG par Construction; Cette Condition jointe à Celle de MF=MG, Nous apprend donc que la ligne NT a tous les points également éloignés des points F et G

elle est par conséquent perpendiculaire à la ligne FG ; et comme nous avons démontré dans le N.° 32 que une ligne ainsi disposée est une tangente, la ligne NT est donc la ligne demandée.

Si l'on avait achevé de décrire les cercles qui passent par le point G, l'on aurait trouvé un point qui aurait donné lieu à une seconde solution.

36. Proposons-nous maintenant de déterminer les expressions des tangentes, sous-tangente, normale et sous-normale.

1.° Nous commencerons par la sous-normale, parceque, au moyen de cette ligne il sera facile de trouver les autres. or nous avons les lignes FG, MR qui sont parallèles comme étant perpend.es à une même ligne TT', elles coupent par conséquent les lignes F'G et F'F en parties proportionnelles ; en sorte qu'on a :

$$F'G : F'F :: MG : FR$$

Mais rappellons-nous que $F'G = 2a$, $FF' = 2c$ et que $MG = FM = \frac{a^2 - cx}{x}$ (N.° 2

En conséquence la proportion devient :

$$2a : 2c :: \frac{a^2 - cx}{x} : FR$$

Nous tirons de là : $FR = \frac{2c(a^2-cx)}{2a^2}$

ou en simplifiant : $FR = \frac{a^2c-c^2x}{a^2}$.

Si nous représentons l'abscisse AQ par x, nous aurons $FQ = AQ - AF = x - c$; au moyen de ces valeurs nous déterminerons directement la sous-normale, car nous avons, $QR = FR + FQ$; substituant à la place de FR et de FQ leur valeur respective que nous venons de trouver, on aura :

$$QR = \frac{a^2c-c^2x}{a^2} + x - c$$

$$QR = \frac{a^2c-c^2x+a^2x-a^2c}{a^2}$$

$$QR = \frac{(a^2-c^2)x}{a^2}$$

Mais nous avons toujours d'après le N° 24, $a^2-c^2=b^2$, donc l'on aura enfin pour valeur de la sous-normale, $QR = \frac{b^2x}{a^2}$.

2° Nous trouverons l'expression de la sous-tangente en considérant le triangle rectangle RMT qui donne :

$$RQ : QM :: QM : QT.$$

ou $\frac{b^2x}{a^2} : y :: y : QT$.

D'où on tire : $QT = \frac{a^2y^2}{b^2x}$

Si nous substituons à la place de y^2 sa valeur prise dans l'équation de la courbe on aura :

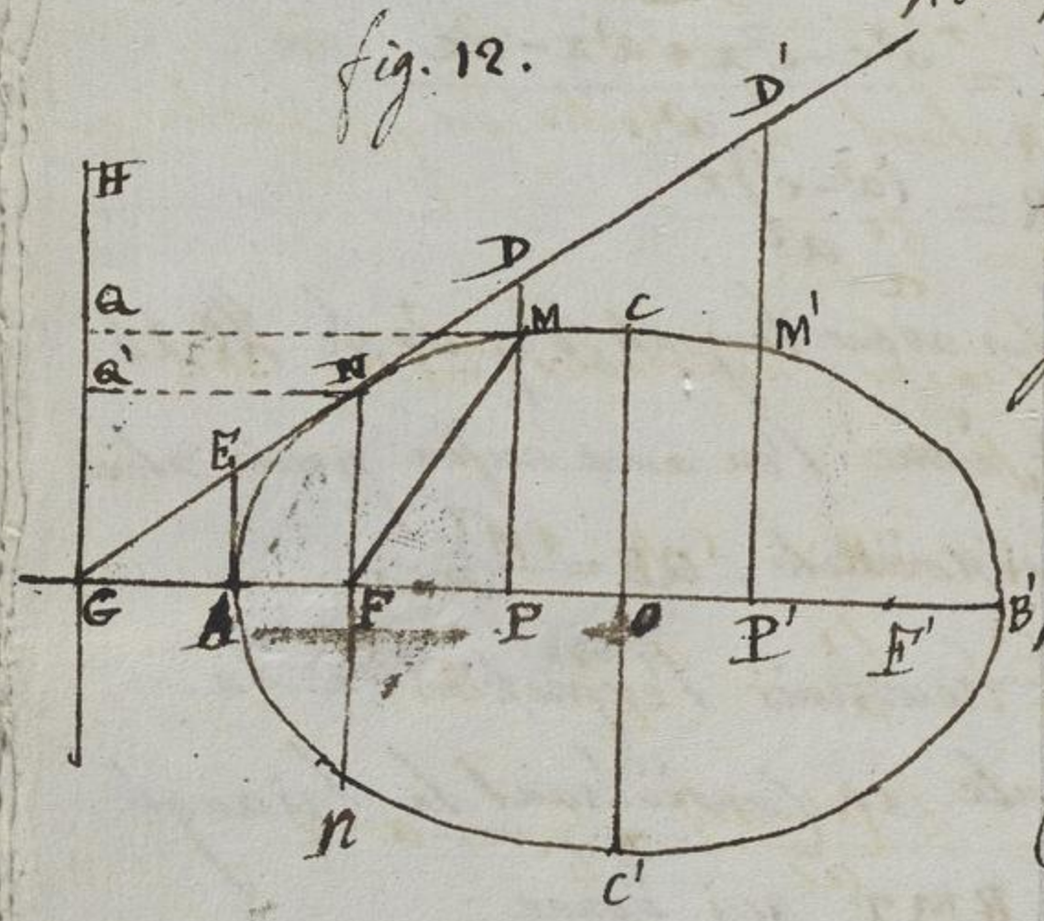
$$QT = \frac{a^2}{b^2x} \times \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

Equation qui nous donnera enfin pour la valeur de la sous-tangente :

$$QT = \frac{a^2 - x^2}{x}$$

3° enfin au moyen du triangle rectangle RMQ il sera facile de calculer la valeur de la normale puisque nous avons déterminé celle de RQ ; de même, au moyen du triangle rectangle MQT on aura d'abord la tangente. Connaissant donc la sous-normale et la sous-tangente nous dispenserons de calculer la normale et la tangente attendu que nous pourrons toujours à tems de la faire lorsque cela sera nécessaire.

fig. 12.



37. Nous allons envisager l'Ellipse par rapport à sa directrice, et nous verrons que cette manière de la considérer, nous conduira à la découverte de quelques nouvelles propriétés relatives à cette courbe.

Si à l'extrémité N. fig. 12. de l'ordonnée du foyer, on mène une tangente GN, et que l'on élève une perpendiculaire au point G où la tangente rencontre l'axe des abscisses, ~~on aura~~ ce sera cette perpendiculaire GH que nous nommerons

Directrice de l'Ellipse.

L'expression de la soustangente en général est $\frac{a^2-x^2}{x}$; si nous voulons la particuliser pour GF il n'y a qu'à mettre à la place de x la valeur qui est pour ce cas $x=c$, et on aura $GF=\frac{a^2-c^2}{c}=\frac{b^2}{c}$.

Nous avons aussi, $AF=AO-FO=a-c$; et $GA=GF-AF$ ou en substituant:

$$GA=\frac{a^2-c^2}{c}-a+c$$

$$GA=\frac{a^2-c^2-ac+c^2}{c}$$

D'où $GA=\frac{a^2-ac}{c}$.

Enfin FN étant la moitié du paramètre, on aura $FN=\frac{b^2}{a}$.

or les triangles semblables GFN, GAE nous donnent:

$$GF : FN :: GA : AE$$

ou $\frac{b^2}{c} : \frac{b^2}{a} :: \frac{a^2-ac}{c} : AE$

D'où $AE=\frac{b^2(a^2-ac)}{ac}\times\frac{c}{b^2}=a-c$.

et comme nous avons d'ailleurs $AF=a-c$ il s'ensuit que la tangeante AE est égale à AF. C. Q. à la distance du sommet au foyer.

38. par la raison que $AF=a-c$ et que $GA=\frac{a^2-ac}{c}$ on a incontestablement la proportion suivante: $AF : AG :: a-c : \frac{a^2-ac}{c}$.

De laquelle on tire : $\frac{AG}{AF'} = \frac{a(a-c)}{c(a-c)}$, supprimant le facteur commun $(a-c)$ et formant une nouvelle proportion avec ce qui reste on a :

$$AF' : AG :: c : a.$$

C'est-à-dire que dans l'ellipse : la distance du sommet au foyer est à la distance de la directrice au sommet, comme la demi-excentricité est au demi-grand-axe.

et comme la demi-excentricité est nécessairement plus petite que le demi-grand axe, il résulte aussi que la distance du sommet au foyer est plus petite que celle de la directrice à ce même sommet.

Cette dernière propriété est un caractère essentiel de l'ellipse : nous verrons, lorsque nous traiterons de l'hyperbole et de la parabole, qu'elle se manifeste très bien d'après la nature même de ces courbes ; c'est-à-dire, que dans l'hyperbole la distance du sommet au foyer sera plus grande que la distance de la directrice au sommet ; et que dans la parabole elle sera égale.

39. En continuant nos observations

Nous voyons que : ~~GP = $\frac{a^2-c^2}{c}$ +~~

$$GP = GF + F'P = \frac{a^2-c^2}{c} + c - x$$

ou $GP = \frac{a^2-cx}{c}$.

or les triangles semblables GAE et GPD,

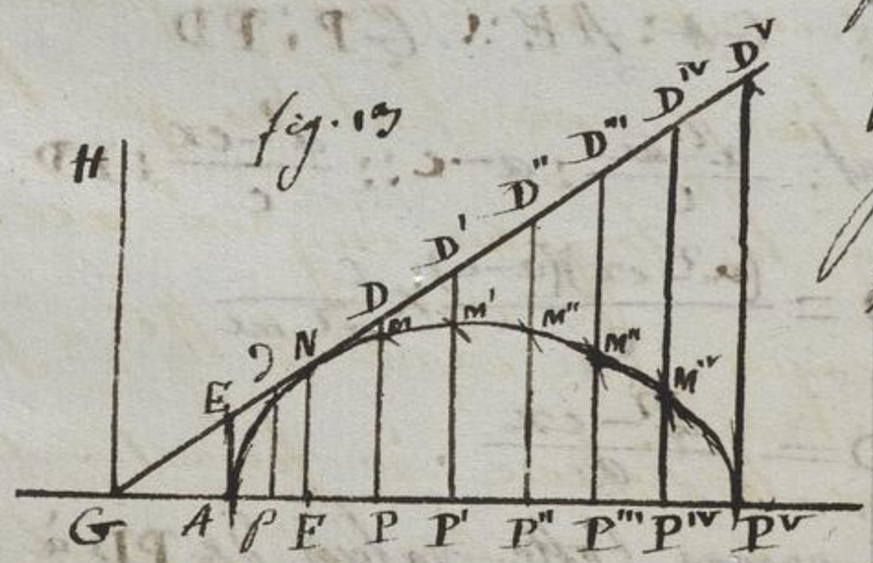
Nous donnent : $GA : AE :: GP : PD$

substituant : $\frac{a^2-ac}{c} : a-c :: \frac{a^2-cx}{c} : PD$.

d'où $PD = \frac{(a^2-cx)(a-c)}{c} \times \frac{c}{a^2-ac}$

enfin : $PD = \frac{a^2-cx}{a}$.

si Nous comparons cette valeur de PD à celle du rayon vecteur trouvée dans le N° 24, Nous verrons qu'elles sont parfaitement egales ; cela Nous apprend donc que la perpendiculaire PD est égale au rayon vecteur FM qui lui correspond. Ce raisonnement qui Nous a conduit à cette propriété, étant général, Nous pourrons l'appliquer à tous les triangles, semblables à GAE, formés par les perpend.es élevées sur le grand axe jusqu'à la rencontre de la tangente ; et dire par conséquent, que les perpendiculaires élevées sur le grand axe de l'ellipse, jusqu'à la rencontre de la tangente menée par l'extrémité de l'ordonnée du foyer, sont respectivement égales aux rayons vecteurs qui partent du même foyer et qui leur correspondent.



40. Rien de plus facile Maintenant que de Construire une Ellipse, par le moyen de Cette Nouvelle propriété; il suffit pour Cela que l'on donne, le point par où la directrice doit passer sur le prolongement de l'axe des abscisses, le sommet de la Courbe et le foyer. En effet, soit donc le point G, fig. 13. par où doit passer la directrice; A le sommet et F le foyer. on élevera au sommet A un perpend.e ~~tangente~~ AE = AF; on joindra le point G et le point E et l'on aura ainsi la droit GD qui devra être la tangente de la Courbe à l'extrémité N de l'ordonn.e du foyer (N.o 37). or pour avoir autant de points de la Courbe que l'on voudra, il n'y a qu'à Elever plusieurs perpend.es sur l'axe GF; les prolonger jusqu'à Ce qu'elles remontent la tangente GD: alors du foyer F Comme Centre et avec des ouvertures de Compas respectivement égales à Ces perpendiculaires, on décrira sur Chacune d'elle, des arcs de Cercles qui donneront ainsi autant de points de la Courbe que l'on voudra. la

longueur du grand axe AP se trouvera déterminée par cette construction.

Pour construire une Ellipse par ce procédé, il n'est pas même nécessaire que l'on connaisse la distance du sommet à la directrice; pourvu, toutefois, que l'on nous donne la longueur du grand axe et l'un des foyers: Car d'après le N° 38, nous savons que, la distance du sommet au foyer est à la distance du sommet à la directrice, comme la demi-excentricité est au demi-grand axe. ainsi l'on connaîtrait ~~aisément~~ aisément la distance GA au moyen de la proportion suivante:

$$c : a :: a - c : AG.$$

41. Corollaire. Si du point M (fig. 12) on abaisse la perpendiculaire MQ sur la directrice, on aura MQ = GP. or les triangles semblables GAE et GPD nous donnent:

$$GP : PD :: GA : AE,$$

et comme on a: GP = MQ, PD = FM, AE = AF, la proportion devient:

$$MQ : FM :: GA : AF$$

et comme on aussi :

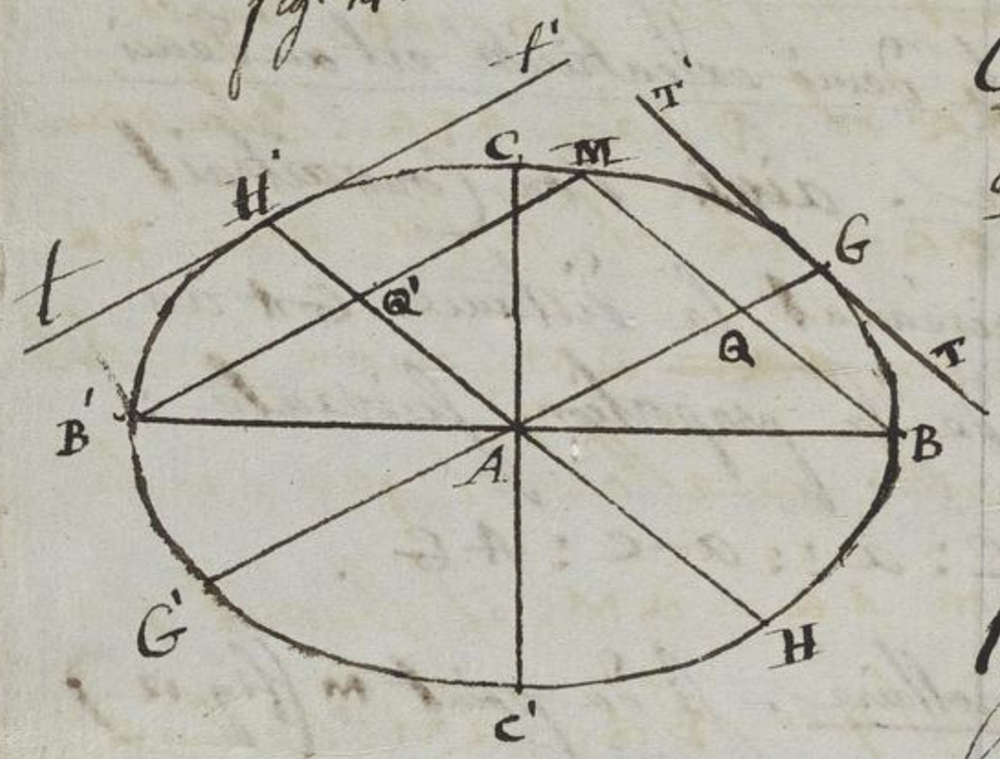
$$GA : AE :: a : c$$

il s'ensuit que $MQ : FM :: a : c$

ou : $FM : MQ :: c : a$

C'est-à-dire, qu'en général, dans l'ellipse la distance d'un point quelconque de la courbe au foyer, est à la distance du même point de la courbe à la directrice, ~~comme~~ dans un rapport constant, qui est celui de la demi-excentricité au demi-grand axe.

fig. 14.



De l'Ellipse rapportée à ses diamètres conjugués.

N.° 42.

1.° Si l'on prend un point M quelconque sur la courbe (fig. 14), et que de ce point l'on mene deux droites BM et B'M aux deux extrémités du grand axe BB'; ces deux droites s'appellent cordes correspondantes ou supplémentaires.

2.° Si par le centre de l'ellipse, on mene deux diamètres respectivement parallèles aux deux cordes supplémentaires BM et B'M, ces lignes se nomment

Diametres Conjugués, à Cause des relations reciproques qui existent entre elles: relations, Comme Nous le verrons, qui sont d'autant plus remarquables qu'utiles, puisqu'elles donnent lieu à Considérer l'ellipse sous un point de vue qui Nous fera découvrir de Nouvelles propriétés relative à Cette Courbe.

Les triangles ABQ et AB'Q' sont égaux Comme ayant le Coté AB = AB'; l'angle BAQ = AB'Q' et B'AQ' = ABQ. Cela étant, le Coté BQ = AQ' et le Coté AQ = B'Q', Mais Comme ~~AQ =~~ Q'M Comme parallèles Comprises entre parallèles et que par la même raison AQ' = QM, il s'ensuit que BQ = QM et que B'Q' = Q'M: Cest à dire que les diametres Conjugués ont la propriété de partager en deux parties égales, les Cordes qui leurs sont respectivement parallèle.

43. Nous allons abandonner pour quelque tems le systeme de Coordonnées rectangulaires BB', CC'; pour Considérer le systeme de diametres Conjugués, Comme un systeme

de Coordonnées obliques auquel Nous rapporterons par Conséquent toutes No Considérations. Nous supposerons que le diametre GG' soit l'axe des absciss et que HH' soit Celui des ordonnées.

Ainsi, si lon rapporte le point M au Nouveau systême de Coordonnées HH' et GG', il est visible que Ce point aura AQ pour abscisse et QM pour ordonnée. Et Maint.t les ordonnées ne sont plus perpendiculaires à laxe des abscisses, par la raison que le systême que Nous venons d'établir n'est pas un systême rectangulaire et que pour déterminer la position d'un objet dans lespace il faut le rapporter à deux dimensions; or si les dimensions entre elles ne sont pas perpendiculaires, les distances MQ' et MQ qui fixent la position du point M, par exemple ne peuvent pas l'être Non plus, attendu quon mene Ces lignes parallelement aux dimensions auxquelles on rapporte le point. Dans la pratique au lieu de prendre MQ', on prend son égale AQ sur laxe des abscisses.

si donc l'on prend une abscisse AQ, l'on voit qu'il y a deux ordonnées qui lui correspondent; et que de plus, ces ordonnées sont égales et de signes contraires. plus l'abscisse AQ sera grande, plus les ordonnées deviendront petites, et réciproquement. or si nous supposons, pour un instant, qu'on prenne une abscisse à partir du point A, et que cette abscisse augmente jusqu'à devenir égale à AG, les ordonnées correspondantes à cette abscisse, se rennieront parallelement à elles-mêmes et leur partie interceptée dans la courbe deviendra de plus en plus petite, à mesure que l'abscisse augmentera; comme ces ordonnées sont toujours egales et de signes contraires, quelque soit l'abscisse que l'on prenne, il s'ensuit que lorsque cette abscisse sera égale à AG, que si l'on suppose que la ligne BM à conservé toute sa longueur, que BM sera devenue TT', et qu'elle n'aura plus que le point G de commun avec la courbe, parceque il n'y a pas de raison pour que cette ligne ait abandonné la courbe plutot en dessus du point G qu'en dessous. la ligne TT' est donc tangente à la courbe à l'extrémité du diamètre GG'.

Le Même raisonnement peut s'appliquer au diametre HH', en sorte que l'on peut encore définir les diametres Conjugués Comme étant, deux diametres dont l'un est parallèle à la tangente qui passe par l'extrémité de l'autre; ou Comme disposés de telle Manière que si l'on fait Mouvoir l'un d'eux parallèlement à lui même, jusqu'à l'extremité de l'autre, il devient tangent à la Courbe à l'extrémité de Cet autre.

44. L'on voit, Maintenant, Combien les propriétés de l'ellipse rapportée à ses diametres Conjugués, ont d'analogie avec Celles que Nous avons observées, lorsque Cette Courbe était rapportée à un systeme aux axes. Cela peut ~~nous~~ Nous faire soupçonner que l'equation qui exprimera Ces propriétés pourra être de la forme ~~y~~ de Celle que Nous avons déjà examiné. ainsi Nous pourrons faire la recherche de Cette formule, uniquement par l'examen des propriétés des diametres Conjugués. Cette ~~Marche~~ Manière de la déduire, quoique

fondée sur l'induction, n'en sera pas moins rigoureux, puisqu'il sera toujours possible de s'assurer de sa réalité par l'analyse de l'équation ~~aux~~ à laquelle on aura été conduit. au reste, cette marche a le double avantage de nous exercer dans les raisonnemens, en nous épargnant la multiplicité d'opérations qu'il faudrait faire pour la trouver de toute autre manière.

D'après la définition des diamètres conjugués, (N° 62) il est clair, qu'ils partagent l'ellipse en deux parties parfaitement symétriques, qui pourraient être superposées au moyen d'un simple renversement. ainsi tout ce que nous dirons dans l'une de ces parties, devra avoir également lieu pour l'autre, et si nous considérons la partie qui est à droite du point A comme le côté positif, l'autre portion qui lui est opposée sera le côté négatif.

faisons $AG = a'$ et $AH = b'$. l'on pourra donc prendre des abscisses positives ou négatives sans que la forme de l'équation change. Mais cela ne peut être qu'autant que ~~cette~~ la seconde puissance de x sera dans cette équation, donc elle devra renfermer le carré x^2.

De même, pour chaque abscisse que l'on prend, il en résulte deux ordonnées égales et de signes contraires; cela veut dire, que l'on peut considérer l'une quelconque de ces deux ordonnées sans que la forme de l'équation change; or comme ces ordonnées sont l'une en + et l'autre en −, il faudra donc que l'équation renferme le carré y^2.

De plus, les abscisses partant du centre A, lorsqu'on fera dans l'équation $x=0$ il en devra résulter $y=\pm b'$ ou $y^2=b'^2$; et lorsque $y=0$ on devra avoir $x=\pm a'$ ou $x^2=a'^2$. Cela veut donc dire que l'equation devra avoir un terme indépendant des deux variables x et y, puisque les hypothèses $x=0$ et $y=0$ ne font pas évanouir tous les termes de l'équation; et c'est terme doit être $a'^2b'^2$, parceque l'hypothèse de $x=0$ donnant pour reste $y=\pm b'$ suppose qu'après avoir supprimé tous les termes qui renfermaient x il est resté $a'^2y^2=a'^2b'^2$ et simplifiant on trouve $y^2=b'^2$ ou $y=\pm b'$.

et enfin lorsqu'on a fait $y=0$ on a obtenu $x=\pm a'$ qu'autant qu'après la

suppression des termes renfermant y, il est resté $b'^2x^2 = a'^2b'^2$, ou $x^2 = a'^2$, ou $x = \pm a'$.

Réunissant donc ces différentes considérations, on voit que l'equation de l'ellipse rapportée à ses diamètres conjugués devra être : $a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2$.

Lorsqu'on procède à la recherche de la vérité par des analogies et des conjectures, et que l'on croit avoir obtenu les résultats que l'on s'attendait ; il est facile de s'assurer de leur certitude, en les analysant, afin de voir si ils expriment les propriétés sur lesquelles les hypothèses que l'on a faites en partant étaient fondées.

Ainsi, si l'equation à laquelle nous sommes arrivés et que nous disons appartenir à l'ellipse rapportée à ses diamètres conjugués, est vraiment celle que nous nous étions proposés de chercher, il s'ensuit qu'elle doit renfermer les propriétés de cette courbe. En effet, si l'on y fait $x=0$ il reste $y^2 = b'^2$ ou $y = \pm b'$ et si $y=0$ on a de même $x = \pm a'$. Par la raison que l'hypothèse $x=0$ entraine $y = \pm b'$, il s'ensuit que l'on fera une courbe épreuve, si au lieu de y dans l'equation nous mettons $\pm b'$, et on doit obtenir pour résultat, $x=0$;

En effet, en faisant la substitution, il vient : $a'^2b'^2 - a'^2b'^2 + b'^2x^2 = 0$

simplifiant il reste $b'^2x^2 = 0$. or le premier membre de cette equation ne peut être égal à zéro qu'autant que l'un des facteurs b'^2 ou x^2 est nul ; Mais ce n'est peut pas être b'^2 puisque nous avons supposé que $y^2 = b'^2$, donc nous trouvons bien $x = 0$.

Si l'on résout l'équation par rapport à y on trouve :

$$y = \pm \frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - x^2}$$

dans laquelle on voit que l'on aura des ordonnées réelles qu'autant que l'on fera $x < a'$ c'est-à-dire $x < AG$. elles seront nulles si $x = a'$, et enfin elles seront imaginaires si $x > a'$. toutes ces hypothèses sont très bien confirmées par la figure, donc l'equation trouvée est vraiment l'equation aux diametres conjugués de l'ellipse.

45. <u>Corollaire</u>. Lorsque nous avons donné la définition des cordes supplémentaires (N° 42), nous avons dit que nous prenions un point M quelconque sur la courbe, or comme on peut le prendre d'une infinité de maniere, et que les cordes menées de

Ce point au deux extrémités de l'axe BB', quoique ayant des inclinaisons différentes, n'en indiquerent pas moins un système de diamètres Conjugués ; il s'ensuit qu'il doit aussi y avoir une infinité de systèmes de Coordonnées Conjuguées dans l'Ellipse.

46. L'équation aux diamètres Conjugués de l'Ellipse étant resolue peut se mettre sous Cette forme :

$$y^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(a'^2 - x^2)$$

de laquelle on tire Cette proportion :

$$y^2 : (a'+x)(a'-x) :: b'^2 : a'^2$$

ou En substituant les lignes :

$$\overline{QM}^2 : G'Q \times GQ :: \overline{AH}^2 : \overline{AG}^2.$$

et Comme Cette proportion peut avoir lieu pour tous les points de la Courbe, je Conclus que, dans l'ellipse, le Carré d'une ordonnée quelconque, oblique ou rectangulaire, est au produit des deux segmens Correspondans du diamètre des abscisses, Comme le Carré du demi-diamètre des ordonnées est au Carré du demi diamètre des abscisses.

Nous allons résoudre quelques questions relatives à l'Ellipse.

47. problème. étant donné un diamètre quelconque dans l'Ellipse, trouver son Conjugué.

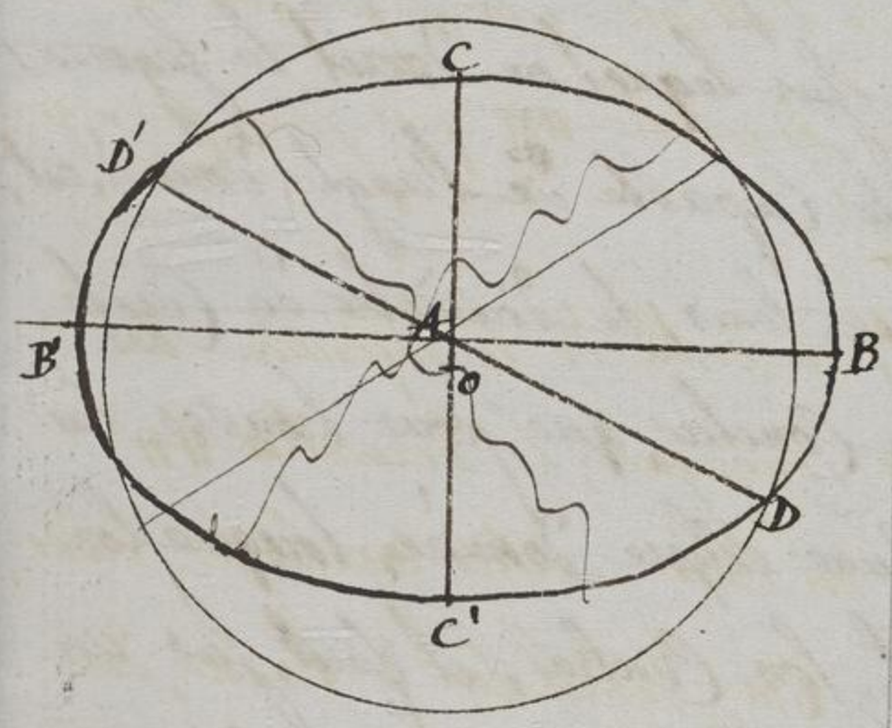
Supposons que l'on nous donne le diamètre GG'. on menera un autre diamètre quelconque tel que BB' (fig. 14); de l'extrémité B' on menera une Corde B'M parallele au diamètre donné GG'; prenant le Milieu de Cette Corde et faisant passer par Ce point et par le Centre de l'ellipse une ligne, on aura ainsi le diamètre HH qui sera Conjugué à GG'.

fig. 14.

En effet, en vertu de la définition des diamètres Conjugués; le diamètre HH' partage en deux parties egales les Cordes, telles que B'M, paralleles à l'autre, donc Cest le diamètre demandé.

48. Corollaire. le problème précédent nous fournit un Moyen bien simple de Mener une tangente à l'ellipse. Car, soit le point G auquel on veut mener la tangente. on ~~joindra~~ menera le diamètre GG', et Cherchant son Conjugué par le moyen précédent, on fera passer par

le point G une ligne parallele à le diametre HH' qui sera la tangente demandée, puisque par Construction elle est parallele a un diametre Conjugué à l'extremité de l'autre. (N° 63).



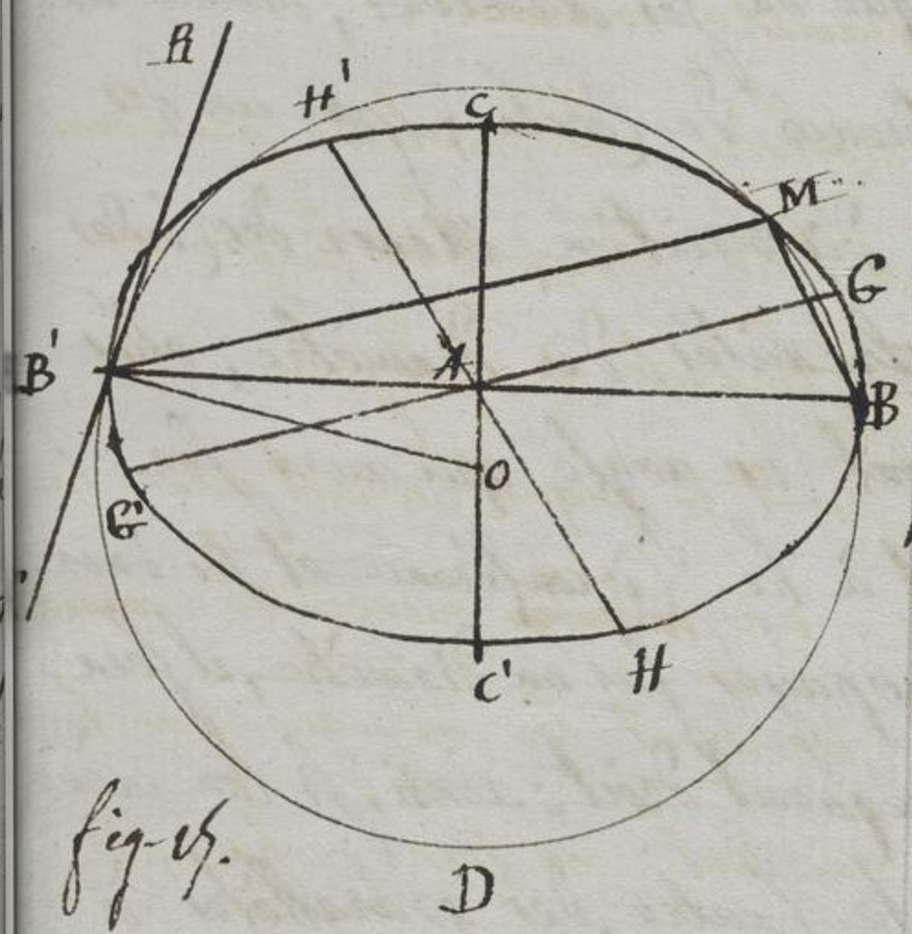


fig. 15.

69. problème. Etablir dans l'Ellipse un systême de diametres Conjugués, qui fassent entre eux un angle égal à un angle donné.

pour Cela, il faut, sur un diamètre quelconque BB', décrire un arc de Cercle Capable de Cet angle donné (fig. 15). par le point M où l'arc Coupera l'ellipse, on mènera aux extremités du diamètre les Cordes BM et B'M, qui indiqueront la position du systême de diamètres Conjugués demandés. il n'y aura donc plus qu'à mener par le Centre les diamètres GG' et HH' respectivement parallèles aux Cordes B'M et BM et la proposition ~~et~~ sera résolue.

pour le démontrer, Nous avons l'angle GAH' qui est égal à BMB'; Mais BMB' = BB'F, Donc l'angle GAH' = BB'F. Maint.t l'angle GAH' a pour supplément GAH; et de même BB'F a pour supplément BB'R; or les deux

Angles GAH' et BB'F' égaux entre eux, ~~que~~ ne peuvent avoir que des angles supplémentaires égaux ; donc l'angle, GAH formé par les deux diamètres Conjugués, est égal à l'angle BB'R qui est par Construction égal à l'angle donné.

Si l'angle donné est un angle droit, les diamètres demandés sont les deux axes de l'ellipse ; alors le diamètre de l'ellipse sur lequel on décrit le segment de Cercle Capable de l'angle donné, est, en même tems, le diamètre du Cercle.

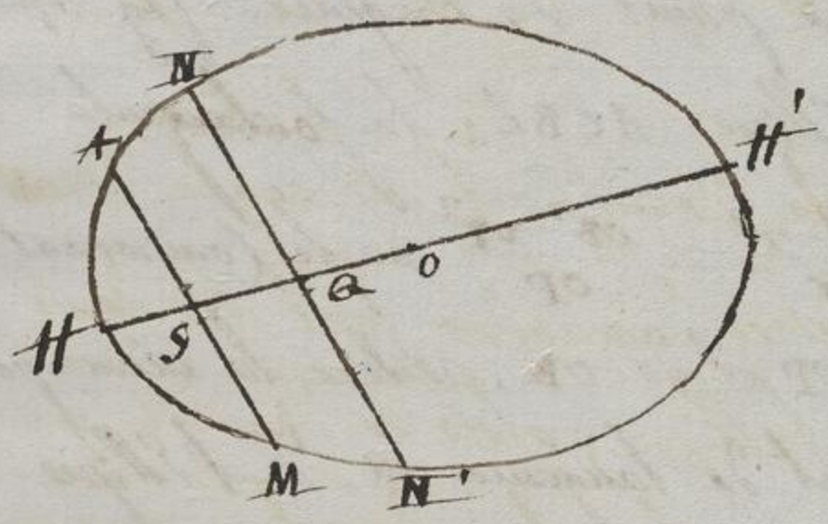
d'où je Conclus, que pour trouver les axes d'une ellipse donnée, lorsque l'on Connait son Centre ; il faut, sur un quelconque de ses diamètres, décrire une Circonférence de Cercle ; par un des points d'intersection, Mener des Cordes aux extrémités du diamètre, elles formeront un angle qui aura son sommet à la Circonférence et ses deux Cotés appuyés sur un diamètre, il sera par conséquent droit ; ainsi, si l'on mène par le Centre, des parallèles à

Ces Cordes : le point les axes demandés.

50. Problème. Trouver le Centre d'une Ellipse ?

Solution. On menera deux Cordes quelconques AM, et NN' parallèles entre elles ; et prenant les Milieux respectifs S et Q de ces Cordes, on fera passer par les points la ligne HH', qui sera un diamètre de la Courbe, dont le milieu O sera le Centre Cherché. fig. 16.

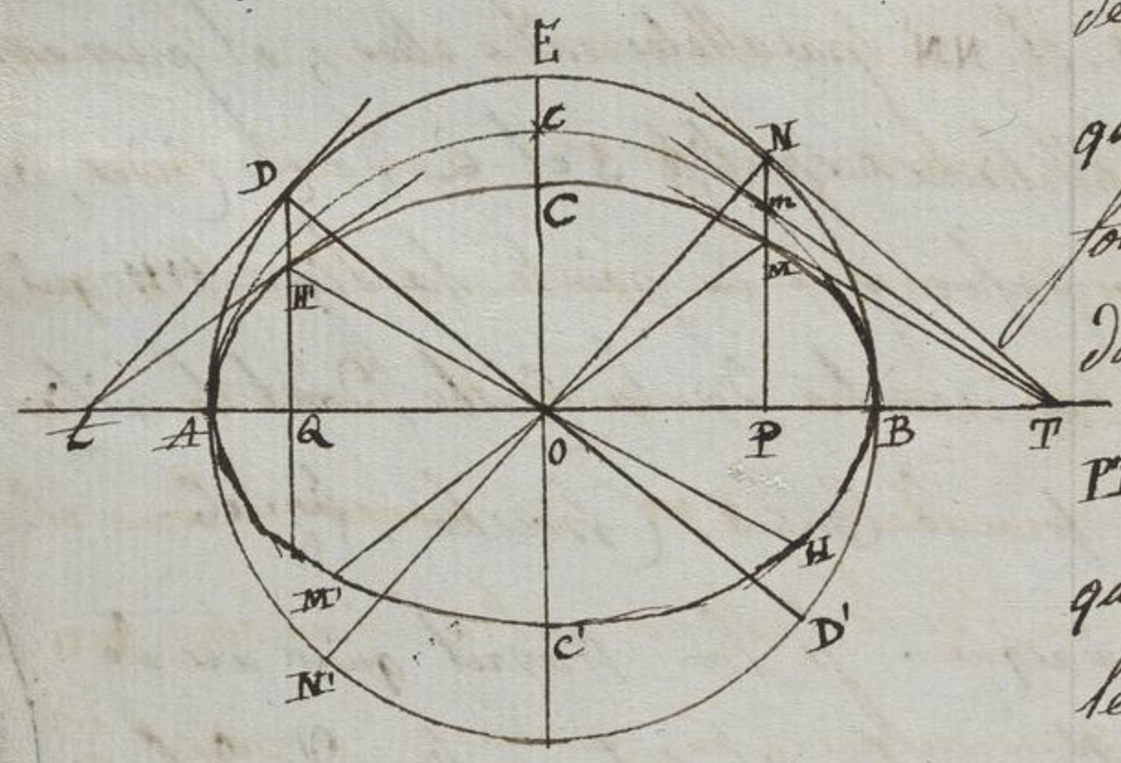
fig. 16.



Remarque. Si l'on n'avait qu'un arc de l'ellipse, et qu'il fut question d'en déterminer le Centre, on établirait dans l'arc donné deux systèmes de Cordes parallèles deux-à-deux ; par le Milieu des deux premières on mènerait une droite qui contiendrait déja le Centre Cherché ; par le Milieu des deux autres on mènerait une autre droite qui contiendrait également le Centre ; et l'intersection de ces deux droites donnerait le Centre de la Courbe.

51. Nous avons trouvé (N° 36) que la sous-tangente de l'Ellipse a pour expression $\frac{a^2-x^2}{x}$, valeur qui est indépendante du

fig. 17.



second axe b de la Courbe: Ce qui signifie que pour toutes les Ellipses qui auront le même grand axe 2a, une même abscisse ~~sera~~ sera Commune à un point de tangence dans Chacune de ces Ellipses qui auront toutes ainsi la même soutangente. Soit M un point de tangence fig. 17. dans l'Ellipse ACBC'; la soutangente $PT = \frac{a^2 - x^2}{x} = \frac{OB^2 - OP^2}{OP}$ ne se Composant que de OP et de OB, restera la même pour le point de tangence m de l'Ellipse ACB; et par Conséquent le point m se trouvera sur le prolongement de l'ordonnée PM. il en sera de même du point N de tangence dans le Cercle AEB, qui aura même soutangente PT'.

§2. Il résulte de là:

1° Un Nouveau Moyen de Mener une tangente à l'Ellipse par un point donné; Car ayant décrit sur AB Comme diamètre un demi-Cercle AEB, on prolongera l'ordonnée PM jusqu'en N; et ayant mené le rayon ON, on Menera sur ON la perpendiculaire NT, qui déterminera le point T pour toutes les Ellipses

Construites sur le même axe AB; il ne s'agira donc que de Mener par le point donné M et par le point T, la droite MT, qui sera la tangente demandée.

2.° Un autre Moyen de résoudre le problème des diamètres Conjugués; Car soit donné le diamètre MM'; on décrira le Cercle AEBDA, et l'on élevera jusqu'en N l'ordonnée perpendiculaire PM; on menera le diamètre NN' au Cercle, et un autre diamètre DD' perpendiculaire au premier; du point D on abaissera sur AB la perpendiculaire DQ, qui Coupera l'Ellipse au point H; faisant passer par ce point le diamètre HH', Ce diamètre sera Conjugué à MM'.

En effet, il résulte de la Construction que tangente DL est parallèle à NN'; menant LH', Cette ligne sera tangente à la Courbe au point H', et sera par conséquent parallèle au Diamètre Conjugué de HH'. il est Maint.t aisé de faire voir que le Conjugué de HH' N'est autre Chose que MM'.

Les triangles LDQ et OMP sont semblables et donnent: $LQ^2 : \overline{OP}^2 :: \overline{DQ}^2 : \overline{PM}^2$;

La nature du Cercle donne

$\overline{DQ}^2 : \overline{PN}^2 :: AQ \times BQ : AP \times BP$;

Mais dans l'Ellipse on a aussi,

$\overline{H'Q}^2 : \overline{PM}^2 :: AQ \times BQ : AP \times BP$;

Donc $\overline{DQ}^2 : \overline{PN}^2 :: \overline{H'Q}^2 : \overline{PM}^2$

soit $DQ : PN :: H'Q : PM$;

Mais $tQ : OP :: DQ : PN$;

Donc enfin: $tQ : OP :: H'Q : PM$.

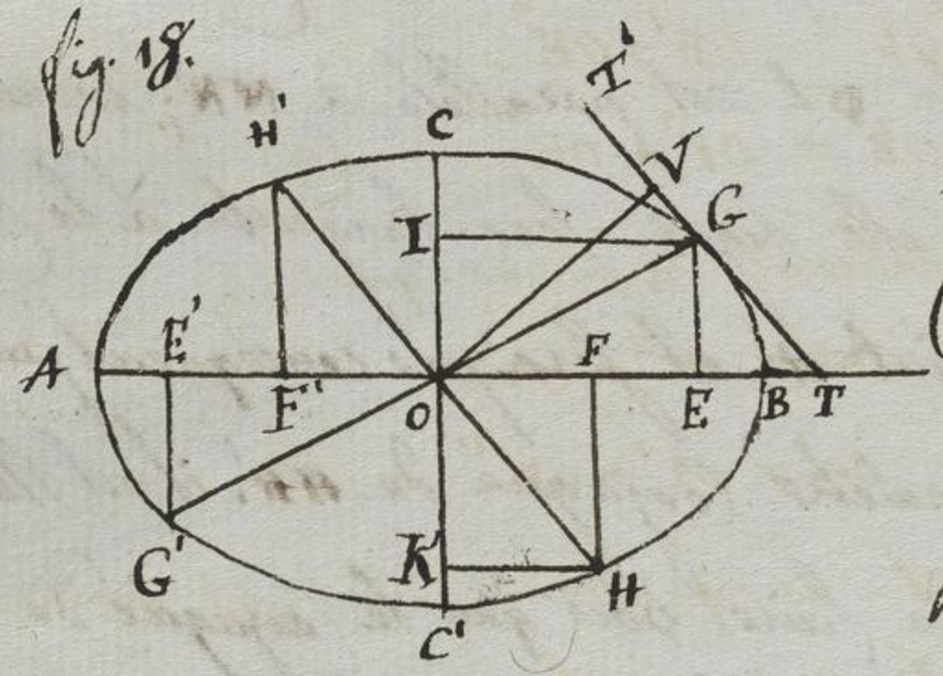
D'après cette proportion, les triangles $AH'Q$ et OPM sont donc semblables; Donc tH' est parallèle à OM. Donc MM' est le diamètre conjugué de HH'.

§3. Théorème. La somme des quarrés de deux demi-diamètres conjugués quelconques de l'Ellipse, est égale à la somme des quarrés des demi-axes.

Démonstration. Soient les axes AB et CC' (fig. 18), et les diamètres conjugués GG' et HH': il faut prouver que l'on a en général, $\overline{OH}^2 + \overline{OG}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2$.

abaissons les perpendiculaires GE, et HE sur l'axe OB, et les perpendiculaires GI, et HK sur l'axe CC'; soit menée la tangente GT. les triangles $OF'H$ et GE

fig. 18.



sont semblables, puisque GT et OH sont parallèles (43), on a donc

$$\overline{TE}^2 : \overline{OF}^2 :: \overline{GE}^2 : \overline{HF}^2$$

Mais, (10),

$$\overline{GE}^2 : \overline{HF}^2 :: BE \times AE : BF \times AF$$

or $BE = OB - OE = a - x$, et $AE = OA + OE = a + x$; de même $BF = OB - OF = a - x'$, et $AF = OA + OF = a + x'$; d'où l'on tire

$$\overline{GE}^2 : \overline{HF}^2 :: a^2 - x^2 : a^2 - x'^2,$$

et par conséquent

$$\overline{TE}^2 : \overline{OF}^2 :: a^2 - x^2 : a^2 - x'^2.$$

Nous avons vu (36) que la sous-tangente TE vaut $\frac{a^2 - x^2}{x}$; et à cause de $OF = x'$, il viendra $\frac{(a^2 - x'^2)^2}{x'^2} : x'^2 :: a^2 - x^2 : a^2 - x'^2$.

D'où l'on tire toute réduction faite

$$x'^2 = a^2 - x^2$$

soit $\overline{OF}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OE}^2$.

D'où $\overline{OB}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{OE}^2$ --- (a)

On démontrerait de même que

$$\overline{OK}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{OI}^2$$

D'où $\overline{OC}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{OK}^2$ --- (b)

ajoutant les equations (a) et (b) membre à membre, il vient:

$$\overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{OI}^2 + \overline{OF}^2 + \overline{OK}^2;$$

Mais 1° $OI = GE$, et $\overline{OE}^2 + \overline{GE}^2 = \overline{OG}^2$,

2° $OK = HE$, et $\overline{OF}^2 + \overline{HF}^2 = \overline{OH}^2$;

Substituant ces valeurs, on aura enfin,

$$\overline{OB}^2+\overline{OC}^2=\overline{OG}^2+\overline{OH}^2$$

soit $a^2+b^2=a'^2+b'^2$.

§4. Corollaire. Ce théorème nous fournit le moyen de déterminer l'expression analytique des deux diamètres conjugués.

Nous avons en effet,

$$\overline{OG}^2=\overline{OE}^2+\overline{GE}^2=x^2+y^2;$$

Mais, à cause de l'equation aux axes

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

il vient

$$\overline{OG}^2=x^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)=\frac{a^2b^2+a^2x^2-b^2x^2}{a^2}.$$

Si de l'equation

$$\overline{OB}^2+\overline{OC}^2=\overline{OG}^2+\overline{OH}^2,$$

on retranche de part et d'autre OG^2,

il restera

$$\overline{OH}^2=\overline{OB}^2+\overline{OC}^2-\overline{OG}^2;$$

Mettant les valeurs respectives, on a

$$\overline{OH}^2=a^2+b^2-\frac{(a^2b^2+a^2x^2-b^2x^2)}{a^2}$$

d'où, toute réduction faite,

$$\overline{OH}^2=\frac{a^4+b^2x^2-a^2x^2}{a^2}$$

et par conséquent

$$OG=a'=\frac{\sqrt{a^2b^2+a^2x^2-b^2x^2}}{a}$$

$$OH=b'=\frac{\sqrt{a^2b^2+a^2x^2-b^2x^2}}{a}$$

§5. Soit une perpendiculaire VO abaissée du Centre O de l'ellipse sur la tangente TT'; Nous allons déterminer son expression.

Les triangles GET et OVT sont semblables, Comme ayant un angle VTO de Commun et Chacun un angle droit; Ces deux triangles donnent GT : GE :: OT : OV.

Si l'on Calcule la valeur de la tangente GT d'après Celle de la soutangente TE qui vaut $\frac{a^2-x^2}{x}$ et Celle de l'ordonnée $GE=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$; on trouvera :

$$GT=\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}\times\sqrt{\frac{b^2x^2-a^2x^2+a^4}{x^2}}$$

et Comme l'on a

$OT=OE+TE=x+\frac{a^2-x^2}{x}=\frac{a^2}{x}$, la proportion indiquée Ci dessus donne

$$\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}\times\sqrt{\frac{b^2x^2-a^2x^2+a^4}{x^2}} : b\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}} :: \frac{a^2}{x} : OV;$$

D'où l'on tire, toute réduction faite :

$$OV=\frac{a^2b}{\sqrt{b^2x^2-a^2x^2+a^4}}.$$

§6. Théorème. Le parallélogramme formé sur deux diamètres Conjugués quelconques, est équivalent au rectangle des deux axes.

Démonstration. L'aire du parallélogramme formé sur les deux demi-diamètres OG et OH', vaut le produit de OH' = OH par OV;

or $OH = \frac{\sqrt{a^4+b^2x^2-a^2x^2}}{a}$

et $OV = \frac{a^2b}{\sqrt{a^4+b^2x^2-a^2x^2}}$

Multipliant de part et d'autre; on aura

$$OH \times OV = ab$$

Dû $4 \times OH \times OV = 4ab$;

ainsi le parallélogramme total qui enveloppera l'Ellipse, formé des quatre parallélogrammes égaux à celui formé par OG et OH', est égal au rectangle de AB par CC'.

57. problème. Déterminer l'aire de l'Ellipse.

Solution. Nous avons vu (52) que l'on a (fig. 17)

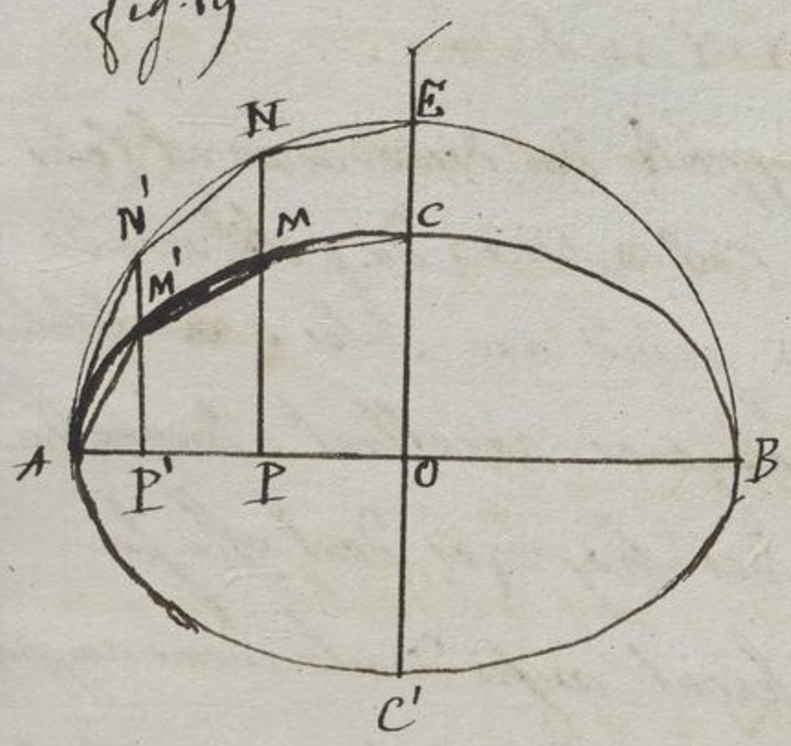
$$DQ : PN :: H'Q : PM;$$

Dû $DQ : H'Q :: PN : PM :: OE : OC$

ainsi, si l'on désigne par y une ordonnée de l'Ellipse et par Y l'ordonnée correspondante du cercle circonscrit, on aura en général,

$$Y : y :: a : b,$$

fig. 19



Soit Maintenant une demi Ellipse ACB fig. 19. et un demi-Cercle Circonscrit AEB; que l'on inscrive dans Celui-ci un polygone régulier ENN'&c. et que de Chaque angle on abaisse les ordonnées rectangulaires EO, NP, N'P'; que par les points Correspondans de l'Ellipse, M, M' &c. on mène les droites CM, MM' &c. on aura un ~~parall~~ polygone inscrit dans l'Ellipse, et d'un même Nombre de Côtés que le premier. Nous aurons ainsi une suite de Trapèzes OPNE, PP'N'N &c. Compris dans le Cercle, et une suite de trapèzes Correspondans dans l'Ellipse, OPMC, PP'M'M &c. l'un quelconque des trapèzes Compris dans l'Ellipse a pour l'expression de son aire

$$\left\{\frac{PM+P'M'}{2}\right\}\times PP' = \left(\frac{y+y'}{2}\right)(x'-x)$$

et le trapèze Correspondant dans le Cercle aura pour la sienne

$$\left\{\frac{PN+P'N'}{2}\right\}PP' = \left(\frac{Y+Y'}{2}\right)(x'-x)$$

Le Rapport de ces deux aires est évidemment le même que Celui de $y+y'$ à $Y+Y'$, à Cause du facteur Commun $(x'-x)$ et du Diviseur Commun 2, or on a

$$y : Y :: y' : Y' :: b : a$$

D'où $y + y' : Y + Y' :: b : a$.

Ainsi les rapports des deux aires est celui de $b : a$, c'est-à-dire, du petit axe de l'Ellipse au grand axe. Les aires totales des deux polygones, résultant chacune de la somme des trapèzes dont elle se compose, seront aussi dans le même rapport. Or rien n'empêche que l'on ne multiplie tellement les côtés des polygones, que l'un diffère aussi peu qu'on voudra de l'Ellipse, et l'autre du Cercle; arrivés à leurs limites, ces polygones seront encore dans le même rapport, en vertu de la loi de continuité; les limites respectives de ces polygones, sont l'Ellipse et le Cercle; donc l'aire de l'Ellipse est à celle du Cercle qui lui est circonscrit, comme le petit axe est au grand axe.

Désignons par E l'aire de l'Ellipse, et par C celle du Cercle circonscrit, nous aurons, $E : C :: b : a$

D'où $E = \frac{bC}{a}$

L'aire du Cercle vaut πa^2, Ce qui donne

$$E = \frac{\pi a^2 b}{a} = \pi ab$$

prennant une Moyenne proportionnelle r entre a et b, on aura enfin

$$E = \pi r^2$$

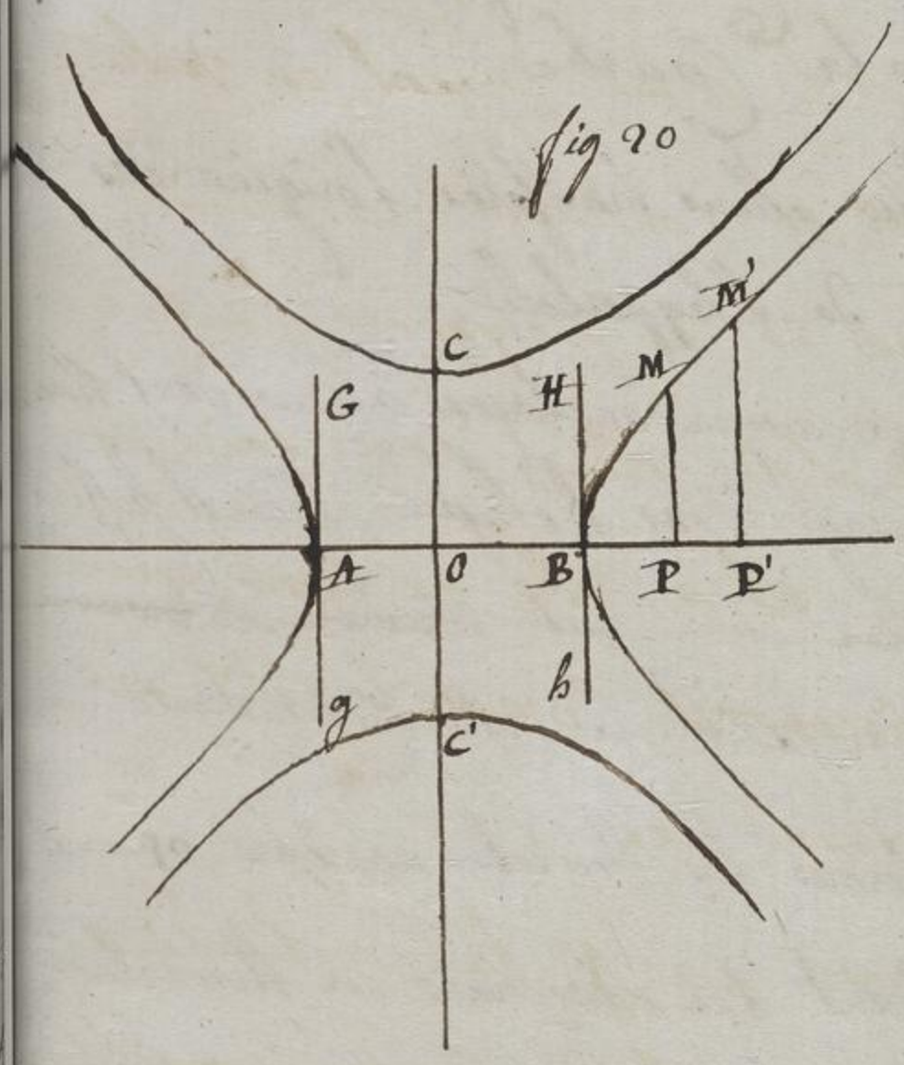
Ce qui signifie que — — —

L'aire de L'Ellipse est égale à Celle D'un Cercle qui aurait un rayon moyen proportionel entre les deux demi-axes de L'Ellipse.

Chapitre second.

De L'hyperbole.

§8. L'equation relative à l'hyperbole, trouvée dans le N° 12 est: $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - 2ax}$; dans laquelle a et b désignent respectivement $OA = OB$ et $OC = OC'$ (fig. 20). x représente une abscisse quelconque partant du sommet A et y l'ordonnée toujours Correspondante à Cette abscisse.



Examinons les Circonstances que Cette équation indique.

Si on fait $x = 0$, l'origine des Coordonnées étant

en A, il y a parconséquent rien a annuler abscisse, et la perpendiculaire élevée à ce point est tangente à la Courbe. C'est en effet ce que confirme l'équation en nous donnant $y = \pm 0$.

De même, si ~~dans~~ l'on fait dans l'équation $x^2 - 2ax = 0$ ou $x = 2a$, Cela signifie que l'abscisse que l'on prend, ~~est~~ égale au premier axe AB, que la perpendiculaire n'a qu'un point de commun avec la ~~tangente~~ Courbe et qu'enfin elle lui est tangente.

Il y a donc, comme nous venons de le voir, deux manière d'obtenir $y = \pm 0$ qui donnent lieu aux deux cas de tangentes aux deux sommets de la Courbe.

59. Nous allons transférer l'origine des Coordonnées au Centre de l'hyperbole.

Il y a deux moyens analoques à ceux dont nous avons fait usage dans l'ellipse; Mais il suffira ici, ~~de trouver~~ d'une seule manière, ~~de trouver~~ l'équation relative à cette circonstance.

Nous ferons les nouvelles abscisses $OP = x'$, ~~et traduisant~~ les anciennes en nouvelles on aura d'abord $AP = AO + OP = a + x'$; d'ou l'on tire $x = x' + a$.

reprenant l'équation

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - 2ax}$$

et substituant à la place de x sa valeur, il vient :

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{(x+a)^2 - 2a(a+x)}$$

effectuant, il vient enfin pour l'équation demandée, en supprimant l'accent,

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Il est facile de s'assurer de la réalité de cette équation en la discutant. Car on voit que plus l'on prendra une abscisse grande, plus l'ordonnée s'augmentera en même tems ; par conséquent, plus la courbe ira en s'élargissant et ira ainsi à l'infini à droite et à gauche, à cause du carré de x^2 ; si l'on fait $x = a$ on aura $y = \pm 0$, les ordonnées sont nulles, c'est le point de tangence ; si enfin $x < a$ les ordonnées sont imaginaires, par conséquent la courbe n'existe pas entre les deux sommets.

<u>6o.</u> Si dans l'equation au centre, on fait $a = b$, ~~l'equation~~ elle devient $y = \pm\sqrt{x^2 - a^2}$; alors les deux axes de l'hyperbole sont egaux et dans ce cas elle prend le nom d'<u>hyperbole équilatère</u> ;

Cette courbe est par rapport à la classe des hyperboles ce qu'est le cercle par rapport à la classe des ellipses.

61. En élevant au Carré l'équation au Centre de l'hyperbole, on trouve,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

D'où $a^2y^2 = b^2x^2 - a^2b^2$

$$a^2y^2 + a^2b^2 = b^2x^2$$

$$a^2(y^2 + b^2) = b^2x^2$$

Dégageant x dans cette dernière equation et extrayant la racine il vient:

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}. \text{ ---- } A'$$

En observant avec attention cette dernière équation et la comparant avec celle de laquelle on est parti, on voit quelle en a la même forme et quelle offre un changement presque renversé dans les quantités qui la composent; c'est-à-dire, que les abscisses ont pris la place des ordonnées, les ordonnées la place des abscisses et qu'enfin les axes se sont respectivement remplacés.

Cette équation ayant beaucoup d'analogie avec celle de l'hyperbole, cela veut donc dire, sur la figure, que l'axe des abscisses AP est devenu celui des ordonnées, et que celui des ordonnées CC' est devenu celui des abscisses et qu'enfin il y a encore deux branches

d'hyperbole sur l'axe cc' parfaitement semblables à celles qui sont sur l'axe AB.

Ainsi donc, si l'on substitue dans cette équation a une valeur telle que OP' à la place de y, on voit qu'il en résultera deux ordonnées égales et de signes contraires telles que P'M' et P'M'', pour x.

Pour faciliter l'intelligence de cette nouvelle hyperbole, il n'y a d'ailleurs qu'à remarquer que les x qui sont des ordonnées pour elle, sont bien toujours des abscisses pour l'autre, puisqu'elles se prennent encore dans le même sens; et que de même, les ordonnées y de la première hyperbole, qui sont devenues des abscisses de la seconde, se prennent aussi toujours dans le sens de oc ou oc'.

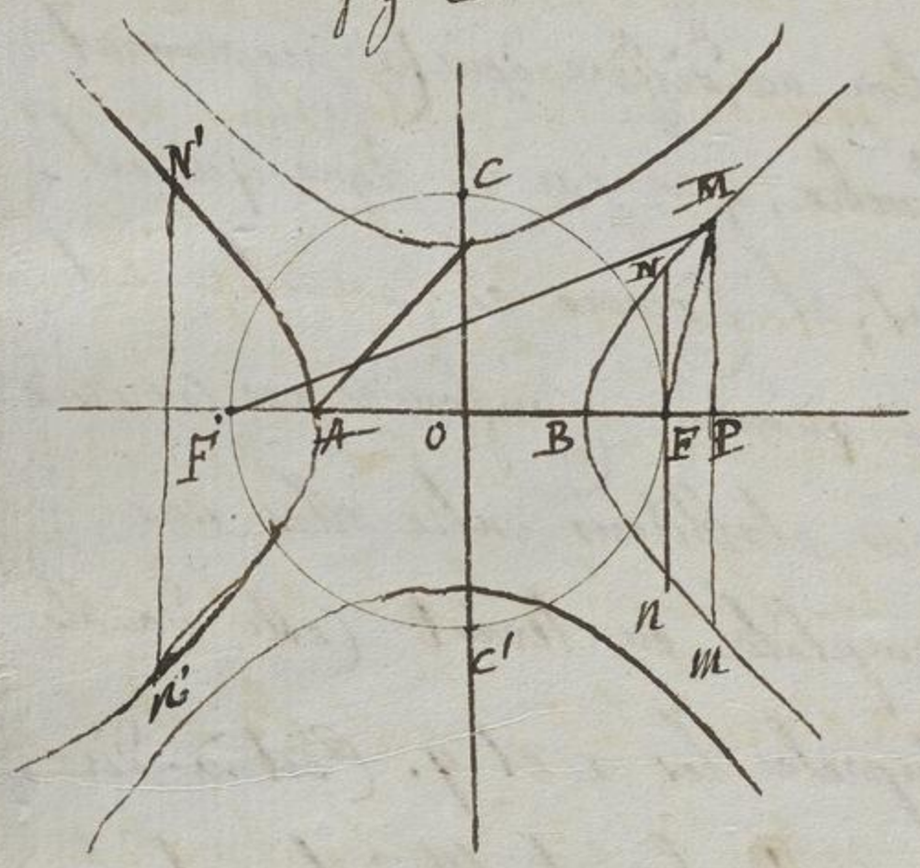
Cette équation ne diffère donc (a proprement parler) de l'autre, que par le signe qui est sous le radical; et comme ce caractère est suffisant pour qu'on ne confonde pas ces deux équations, nous établirons entre elles une analogie complète, en levant cette double manière d'interpreter les x et y. C'est-à-dire, que x et y représenteront, maintenant, les abscisses et les ordonnées, soit de la première hyperbole, soit de la seconde. L'équation A' devient donc $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{y^2 + a^2}$.

L'hyperbole construite sur l'axe AB se nomme hyperbole directe, et par rapport à celle-ci, l'autre se nomme hyperbole conjuguée.

Les deux équations relatives à ces courbes ne diffèrent que par le signe qui est sous le radical, nous pourrons les réunir en une seule qui portera le double signe, et en ayant soin, dans les circonstances qui se présenteront, de distinguer que le signe plus se rapporte à à l'hyperbole conjuguée et le signe moins à l'hyperbole directe. Ces deux courbes sont donc comprises dans l'équation

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 \pm a^2}.$$

fig. 21.



67. Si l'on prend une ouverture de compas égale à AC, et que du point O comme centre on décrive un arc de cercle, on coupera le prolongement de l'axe AB aux points F et F' qu'on appelle les foyers de l'hyperbole; et la même ouverture de compas, en achevant le cercle, déterminera les foyers f et f' de l'hyperbole conjuguée. (fig. 21.)

Les deux droites FM, F'M menée des foyers

à un point quelconque de la courbe, tel que M, se nomment les rayons vecteurs comme dans l'ellipse.

63. Théorème. Dans l'hyperbole, la différence des deux rayons vecteurs est constante, et elle est égale au grand axe.

Démonstration. Faisons $AC = OF = OF' = c$, $OP = x$, d'où $PF = OP - OF = x - c$, et $PF' = OP + OF' = x + c$. Le triangle rectangle PFM nous donne:

$$\overline{FM}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{PM}^2 = (x-c)^2 + y^2$$

et le triangle PF'M donne

$$\overline{F'M}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PF'}^2 = (x+c)^2 + y^2.$$

Mettant, dans ces deux expressions, la valeur de y^2 tirée de l'équation de la courbe, nous aurons d'abord:

$$\overline{FM}^2 = x^2 - 2cx + c^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

$$\overline{F'M}^2 = x^2 + 2cx + c^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2);$$

observons que le triangle rectangle ACO donne

$\overline{AC}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OC}^2$, soit $c^2 = a^2 + b^2$, et mettant cette valeur de c^2 dans les expressions ci-dessus, on aura,

$$\overline{FM}^2 = \frac{a^2x^2 - 2a^2cx + a^4 + a^2b^2 + b^2x^2 - a^2b^2}{a^2}$$

$$\overline{F'M}^2 = \frac{a^2x^2 + 2a^2cx + a^4 + a^2b^2 + b^2x^2 - a^2b^2}{a^2}$$

réduisant et simplifiant il viendra:

$$FM^2 = \frac{(a^2+b^2)x^2 - 2a^2cx + a^4}{a^2}$$

$$F'M^2 = \frac{(a^2+b^2)x^2 + 2a^2cx + a^4}{a^2}$$

remplaçant ici a^2+b^2 par c^2 il viendra :

$$FM^2 = \frac{c^2x^2 - 2a^2cx + a^4}{a^2} = \frac{(cx-a^2)^2}{a^2}$$

$$F'M^2 = \frac{c^2x^2 + 2a^2cx + a^4}{a^2} = \frac{(cx+a^2)^2}{a^2}$$

Doù

$$FM = \frac{cx-a^2}{a^2} = \frac{cx}{a} - a$$

$$F'M = \frac{cx+a^2}{a^2} = \frac{cx}{a} + a$$

si l'on retranche la premiere de ces valeurs de la seconde, on aura :

$$F'M - FM = 2a,$$

résultat qui démontre l'enoncé du théreme.

63. Corollaire 1er Nous tirons de cette propriété une Methode De Construire une hyperbole.

1ere Construction. D'une ouverture de compas quelconque telle que FM, et du foyer F' comme centre, on décrira une circonférence de cercle ; ensuite d'une autre ouverture de compas F'M, plus grande ou plus petite que la 1ere d'une difference égale à AB (selon que F'M a été plus petit ou plus grand que AB), et du

point F' comme centre, on décrira une autre circonférence de cercle, qui coupant la première aux points M et m, déterminera ainsi deux points de la courbe en alternant la construction entre les deux foyers, on déterminera les deux points M' et m', symétriques aux deux premiers.

une suite de constructions semblables donnera ainsi autant de points de la courbe que l'on voudra.

2.e Construction de l'hyperbole.

64. Cette construction est l'analogue de celle que nous avons donnée pour l'ellipse au (N.° 17). les rayons vecteurs ont pour expression respective, (N.° 63).

$$FM = \frac{cx}{a} - a \,,\; F'M = \frac{cx}{a} + a \,;$$

Choisissant une abscisse à volonté OP, et la substituant à la place de x ; on déterminera la valeur linéaire de $\frac{cx}{a}$; retranchant AB de cette valeur, on aura le rayon FM ; et ajoutant AB à $\frac{cx}{a}$, on aura le rayon vecteur correspondant F'M. répétant cette construction plusieurs fois on aura autant de points de la courbe que l'on voudra.

64. Corollaire 2. Si nous faisons $FP = x'$, Nous aurons $OP = x = OF + FP = c + x'$; Mettant cette valeur de x dans l'expression du rayon vecteur, en faisant $FM = z$, Nous aurons d'abord :

$$z = \frac{c(c+x') - a^2}{a} = \frac{cx' + c^2 - a^2}{a} ;$$

Mais Nous avons (63) $c^2 - a^2 = b^2$, ce qui donne

$$z = \frac{b^2 + cx'}{a}$$

Si Nous désignons par φ l'angle MFA du rayon vecteur avec l'axe AB, Nous aurons $\cos\varphi = -\cos MFP$, d'où $\cos MFP = -\cos\varphi$; le triangle rectangle MFP nous donne :

$$R : \left\{ \begin{matrix} \sin PMF \\ \cos MFP \end{matrix} \right\} :: FM : FP.$$

Substituant les valeurs respectives, il vient

$$R : -\cos\varphi :: z : x'$$

$$\text{d'où } x' = -z\cos\varphi ;$$

Mettant cette valeur de x' dans l'expression de z ci-dessus, et dégageant ultérieurement z, on aura enfin

$$z = \frac{b^2}{a + c\cos\varphi}$$

équation polaire de l'hyperbole.

66. Corollaire 3e. si l'on considère le rayon vecteur FN perpendiculaire au premier axe AB, et que dans l'expression du rayon vecteur on mette l'abscisse OF = c à la place de x, on aura (fig. 21)

$$FN = \frac{cx - a^2}{a} = \frac{c^2 - a^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

d'où $Nn = \frac{2b^2}{a}$

expression constante de la corde Nn passant par le foyer perpendiculairement au 1er axe. Cette corde se nomme, comme dans l'ellipse, le paramètre de la courbe.

en faisant $\frac{2b^2}{a} = p$, d'où $\frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{2a}$, l'introduction du paramètre dans les equations de la courbe, donnera

equation au centre $y = \pm \frac{p}{2a}\sqrt{x^2 \pm a^2}$

equation au sommet $y = \pm \frac{p}{2a}\sqrt{x^2 - 2ax}$.

67. problème. par un point M de l'hyperbole mener une tangente à cette courbe ?

solution. portez MF sur MF' de M en I; joignez I et F, et sur IF abaissez la perpendiculaire MH, qui sera la tangente demandée, (fig 22, ci-après).

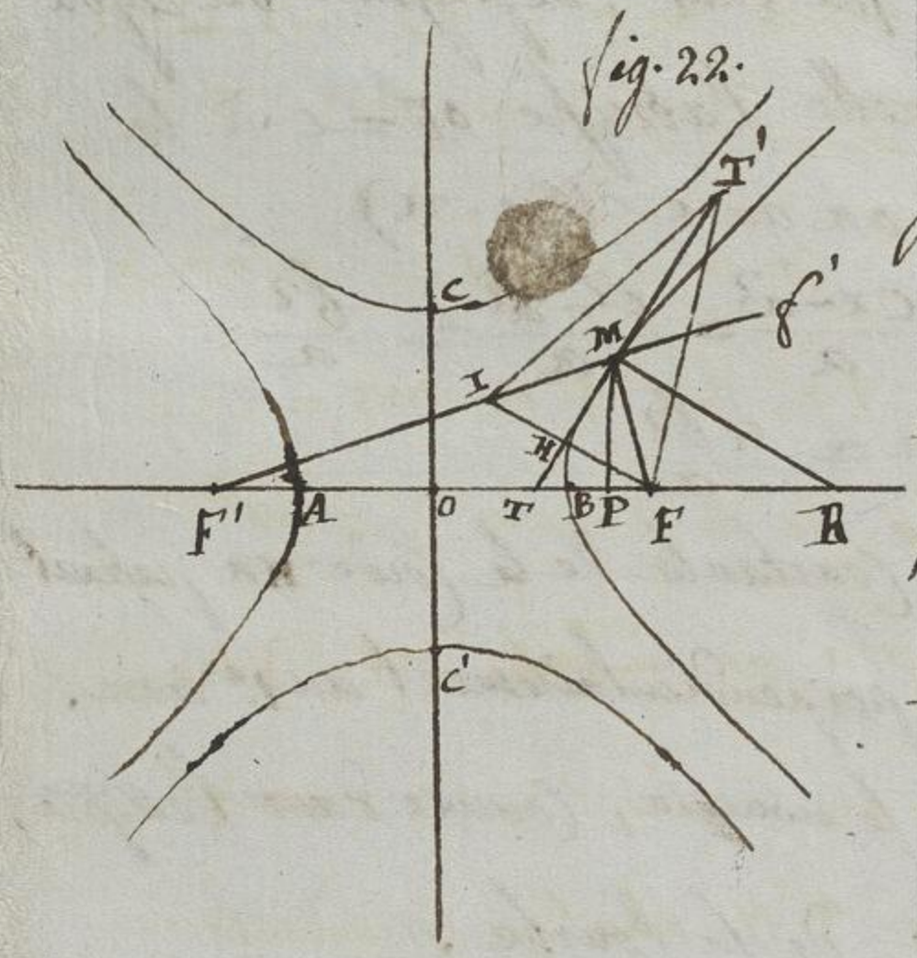


fig. 22.

La démonstration en est facile à donner : Car elle est parfaitement analogue à Celle que nous avons donnée pour l'ellipse.

68. Corollaire. les deux angles FMT et F'MT sont égaux, ce qui est évident ; ainsi, dans l'hyperbole, Comme dans l'Ellipse, la tangente divise en deux également l'angle formé par les rayons vecteurs.

69. Corollaire. la Normale MR divise en deux également l'angle F'Mf' formé par l'un des rayons vecteurs et le prolongement de l'autre ; Car les angles TMF et T'Mf' sont égaux, Comme opposés par le sommet ; et si de Chacun des deux angles droits TMR et T'MR on ôte respectivement les angles égaux TMF et T'Mf', les restes seront égaux, et l'on aura TMF = T'Mf'.

à Cause que TMI = T'Mf'

7°. problème. d'un point T' hors de la Courbe, Mener une tangente à l'hyperbole ?

Solution. du foyer F' Comme Centre et d'une ouverture de Compas égale au premier axe AB, on décrira du Coté de T' un arc de Cercle indéfini ; ensuite du point T' et d'une ouverture de Compas égales à T'F, on décrira un autre arc de Cercle, qui Coupera le 1er

en un point I; par les points F' et I, on menera une droite qui rencontrera la Courbe en un point M; menant par les points T' et M une droite MT'; Ce sera la tangente demandée.

En effet, à Cause de $F'I = 2a$ on a $MI = F'M - 2a$, soit $F'M - MI = 2a$; et la Nature de la Courbe donnant $F'M - MF = 2a$, on a ~~en~~ ~~ainsi~~ ainsi $MI = FM$.

on a aussi, par Construction, $T'I = T'F$; ainsi la droite T'H étant perpendiculaire sur FI, est est tangente à la Courbe au point M. (67).

71. Les Coordonnées OP et PM du point de tangence M, servent à déterminer la sousnormale PR et la sous-tangente PT.

1° Nous avons $F'I : F'F :: MI : FR$, ++ or Nous avons aussi $F'I = 2a$, $F'F = 2c$,

$$MI = FM = \frac{cx - a^2}{a},$$

d'où ~~tou~~ tire:

$$FR = \frac{c^2x - a^2c}{a^2}.$$

Mais $PR = FR + FP = FR + (c - x)$

d'où $PR = \frac{c^2x - a^2c}{a^2} + (c - x) = \frac{(c^2 - a^2)x}{a^2} = \frac{b^2x}{a^2}$.

expression de la sousnormale.

++ à Cause des lignes IF, MR qui sont parallèles et qui Coupent F'R et F'M.

2.° le triangle rectangle TMR nous donne

$$PR : PM :: PM : PT.$$

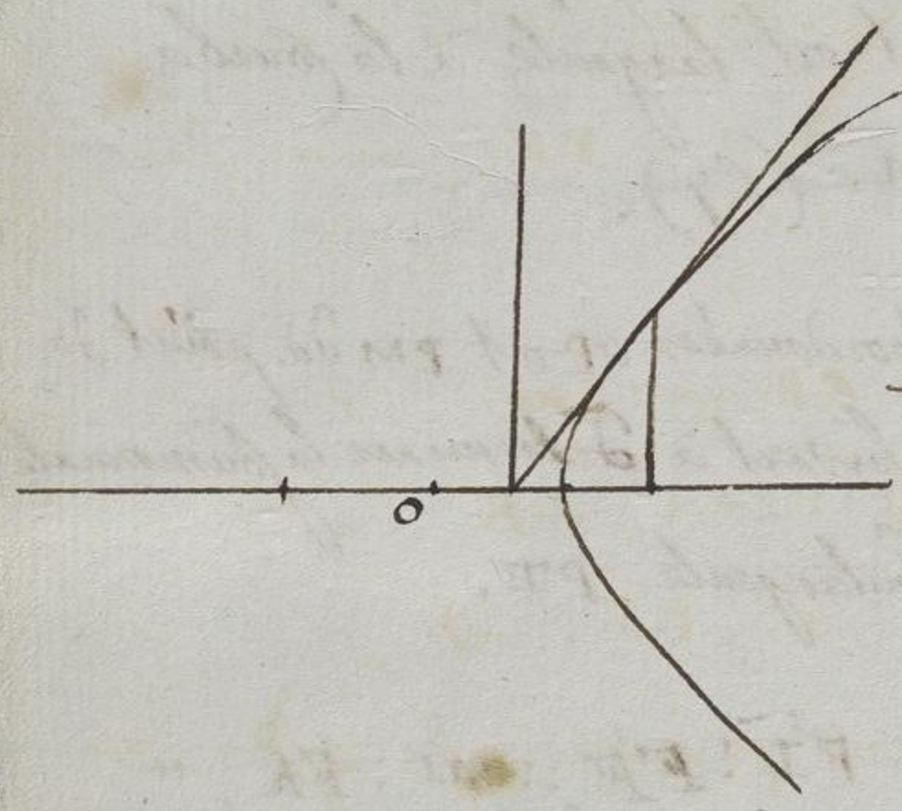
soit $\frac{b^2x}{a^2} : y :: y : PT.$

d'où $PT = \frac{a^2y^2}{b^2x}$;

substituant, si l'on veut, la valeur de y^2 que donne l'equation de la Courbe, ~~on~~ ~~aura~~ $y^2 = \frac{b^2\left(x^2-a^2\right)}{a^2}$

on aura $PT = \frac{x^2-a^2}{x}$.

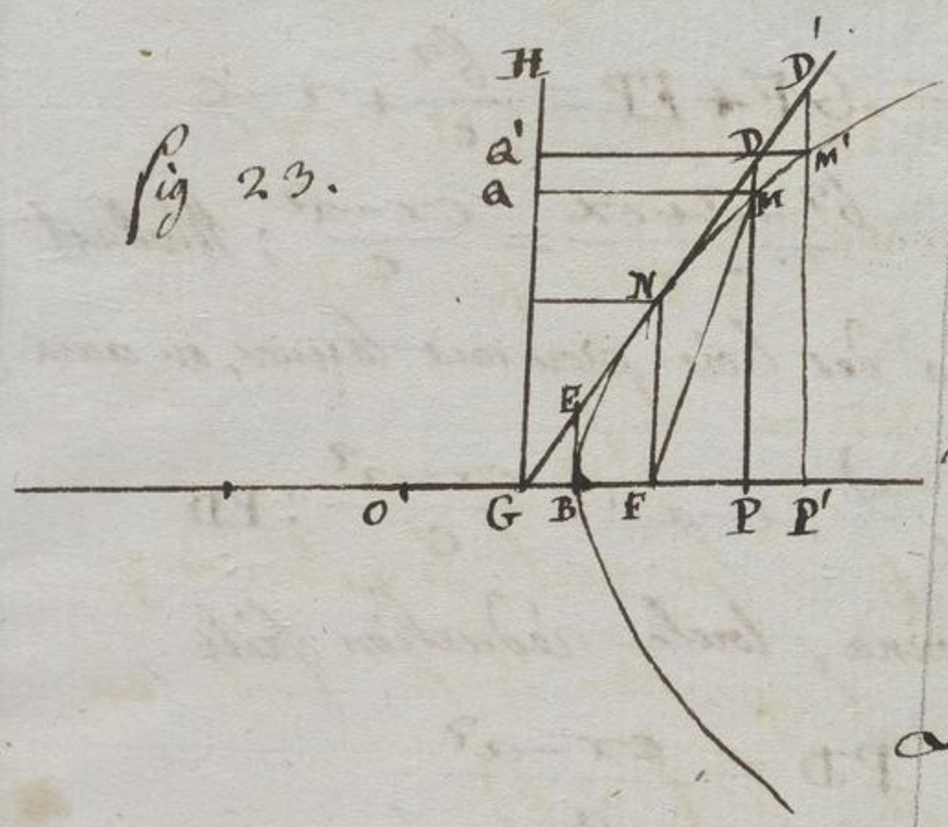
3.° on dérivera aisément de la sousnormale et de la soutangente, l'expression de la tangente MT.



72. si l'on élève l'ordonnée FN (fig. 29) perpendiculaire sur l'axe BP, et que par le point N, extrémité du paramètre, on mène la tangente NG à la Courbe, jusqu'à la rencontre G de l'axe, la soutangente FG aura une valeur déterminée comme dans l'ellipse.

la soutangente étant en général $\frac{x^2-a^2}{x}$, et le point N donnant $x = OF = c$, on aura $GF = \frac{c^2-a^2}{c} = \frac{b^2}{c}$.

fig 23.



et à cause de $GB = GF - BF$, et de $BF = OF - OB = c - a$, il viendra

$$GB = \frac{b^2}{c} - (c-a) = \frac{ac + b^2 - c^2}{c};$$

Mettant ici la valeur de $c^2 = a^2 + b^2$, et reduisant, il restera

$$GB = \frac{ac - a^2}{c} = \frac{a(c-a)}{c}.$$

Les triangles semblables GFN et GBE nous donnent $GF : FN :: GB : BE$;

or nous avons (66) $FN = \frac{b^2}{a}$, d'où

$$\frac{b^2}{c} : \frac{b^2}{a} :: \frac{a(c-a)}{c} : BE,$$ ce qui donne toute réduction faite :

$$BE = c - a = BF,$$ comme dans l'ellipse.

La valeur de GB nous donne

$$c : a :: c - a : GB$$

soit $c : a :: BF : GB$,

ce qui fait voir qu'à cause de $c > a$ on a aussi $BF > GB$,

relation que nous avons annoncée au (N.° 38) en traitant de l'ellipse.

73. Si par un point quelconque M ou M' de la courbe, nous faisons passer une perpend.e PD ou PD' à l'axe BP, nous aurons :

$$GB : BE :: GP : PD ;$$

or $GP = GF + FP = \frac{b^2}{c} + x - c$

$$GP = \frac{b^2 - c^2 + cx}{c} = \frac{cx - a^2}{c} ;$$ Mettant la valeur des trois premiers termes, on aura :

$$\frac{a(c-a)}{c} : c - a :: \frac{cx - a^2}{c} : PD$$

Ce qui donne, ~~toute~~ réduction faite,

$$PD = \frac{cx - a^2}{a} ,$$

valeur qui étant égale au rayon vecteur FM (§1), fait voir que pour chaque point de la Courbe on a

$$FM = PD , \quad FM' = P'D' \text{ &c.}$$

Cette relation fournit un moyen de Construction pour l'hyperbole, absolument semblable à Celui que Nous avons indiqué pour l'ellipse au (N.° 40).

Soient, en effet, B le sommet de la Courbe, O son Centre et F son foyer ; on déterminera d'abord la valeur de

$$GF = \frac{c^2 - a^2}{c} = \frac{(c+a)(c-a)}{c} ;$$

on élèvera au point B la perpendiculaire $BE = BF$, on menera la droite indéfinie GD, et ayant mené autant de

perpendiculaires PD, P'D' à l'axe BP, qu'il est nécessaire, du point F comme centre et d'un rayon successivement égal à chaque perpendiculaire, on décrira des arcs de cercle qui couperont respectivement chaque perpendiculaire aux points M et M', et donneront ainsi autant de points de la courbe que l'on voudra.

74. La proportion GP : PD :: GB : BE, donne, en vertu de la construction,

MQ : FM :: GB : BF :: a : c

d'où FM : MQ :: c : a ;

résultat qui peut s'énoncer ainsi :

Dans l'hyperbole, la distance de chaque point de la courbe au foyer est à la distance du même point à la directrice, dans un rapport constant, qui est celui de la distance du centre au foyer au demi premier axe.

75. Si par le centre O (fig. 26) on mène une droite indéfinie OH' parallèle à AC, ou, ce qui revient au même, si ayant élevé au point B une perpendiculaire BH' égale au

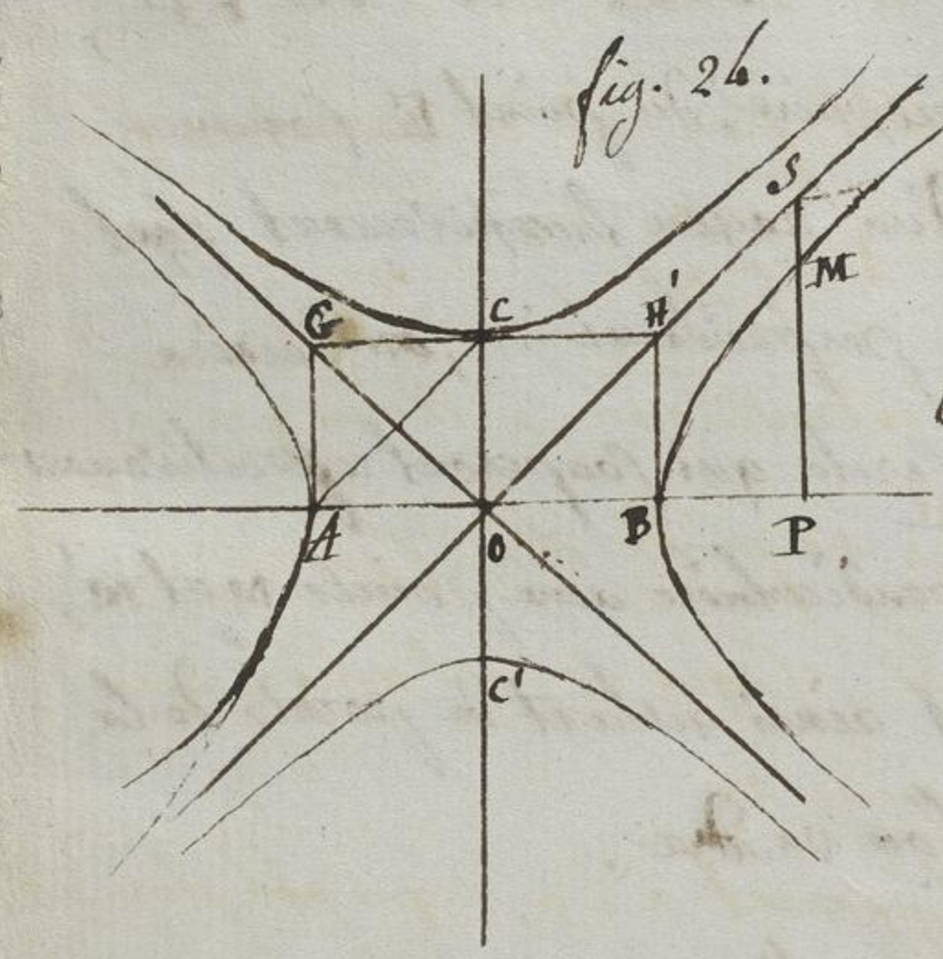


fig. 26.

demi-second axe OC, on fait passer par les points O et H' une droite indéfinie, on sapercera aisément que cette droite ne pourrait jamais atteindre la Courbe; et il en sera de même de la droite OG menée de la même Manière du Coté opposé, en faisant AG = OC.

en effet, si la droite OH' atteignait une fois la Courbe, on aurait une ordonnée de la Courbe qui appartiendrait en même tems à la droite OH'; et à cause des triangles semblables OBH', et OPS, on aurait, et désignant par x et y les Coordonnées du point de rencontre:

$$OB : BH' :: x : y$$

soit $a : b :: x : y$

d'où $y = \frac{bx}{a}$.

D'un autre Coté la Nature de la Courbe Nous donne $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$;

égalant entre elles ces deux valeurs de y, on aurait:

$$\frac{bx}{a} = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

d'où $x = \sqrt{x^2 - a^2}$

et $x^2 = x^2 - a^2$;

Divisant tout par x^2, on aurait en fin

$$1 = 1 - \frac{a^2}{x^2}$$

résultat contradictoire, à moins que la fraction $\frac{a^2}{x^2}$ ne puisse être considérée comme nulle ; ce qui ne peut arriver que de deux manières :

1° ou en supposant $a = 0$, ce qui ~~pt~~ placerait le sommet de la courbe au centre O, et lui substituerait ainsi les deux droites OH' et OH ; 2° ou en supposant à x une valeur supérieure à toute grandeur assignable, ce qui revient à dire que le point de rencontre étant infiniment éloigné, ne saurait exister.

On appréciera encore mieux le caractère de la circonstance que nous examinons, en établissant l'expression de la différence SM qui existe entre une ordonnée PS de la ~~courbe~~ OH', et l'ordonnée correspondante PM de la courbe.

or la proportion OB : OH' :: OP : PS

donne $PS = \frac{bx}{a}$,

on aura donc

$$SM = PS - PM = \frac{bx}{a} - \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

d'où $SM = \frac{b}{a}\left\{x - \sqrt{x^2-a^2}\right\}$

divisant au dedans, et Multipliant au dehors par x, on a

$$SM = \frac{bx}{a}\left\{1 - \sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\right\};$$

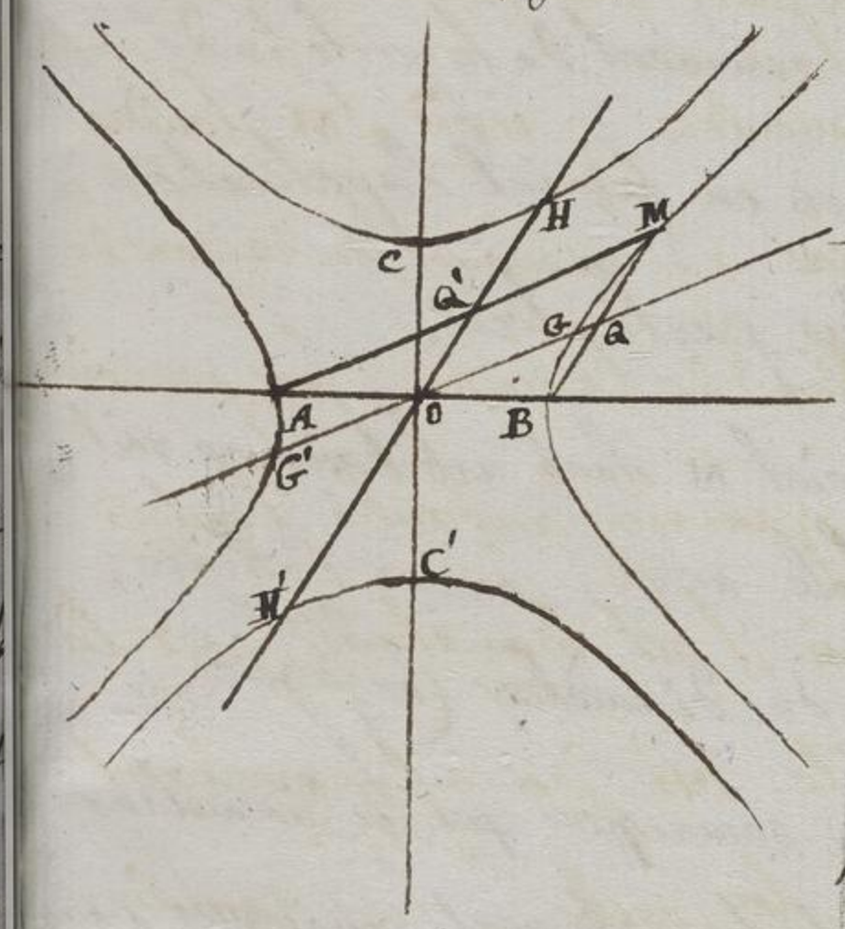
Ce qui fait voir que l'on ne saurait avoir $SM = 0$, qu'autant que la fraction $\frac{a^2}{x^2}$ se serait anéantie. Mais Cette fraction, qui ne s'évanouira jamais rigoureusement, tant que a aura une valeur quelconque, deviendra toujours plus petite à mesure que x augmentera; ainsi SM tendra de plus en plus à s'évanouir, en raison de l'augmentation de l'abscisse, sans pouvoir Néanmoins jamais s'anéantir tout-à-fait. ainsi il est bien établi par là, que la droite OH ira en s'approchant toujours de la Courbe, sans jamais pouvoir l'atteindre: Ce qui a fait donner à Cette ligne droite le Nom d'asymptote. Nous examinerons ailleurs de plus près les propriétés remarquables des lignes

gH' et Gh que nous venons de déterminer et qu'on nomme ainsi les asymptotes de l'hyperbole.

Bornons-nous à ajouter ici que si l'hyperbole était équilatère, on aurait OB = BH' = Bh, ce qui ferait que l'angle BOH' = BOh vaudrait un demi-droit, et qu'en conséquence l'angle hoH des asymptotes serait droit: propriété qui n'appartient que l'hyperbole équilatère.

De l'hyperbole rapportée à ses Diamètres Conjugués et à ses asymptotes.

fig. 25.



76. Si des extrémités A et B du premier axe de l'hyperbole (fig. 25) on mène à un point M de la courbe, les cordes supplémentaires AM et BM, et que par le centre O, on fasse passer un diamètre GG' parallèle à AM, et un autre diamètre HH' parallèle à BM, ces deux diamètres seront conjugués entre eux, et jouiront, dans l'hyperbole, des mêmes propriétés que nous avons remarquées dans les diamètres conjugués de l'ellipse.

Car les triangles égaux AOQ' et OBQ, tous deux semblables à ABM, donnent BQ = QM, et

$AQ' = a'M$; et par conséquent une droite passant par le point G parallèlement à BM, serait une tangente à la courbe ; ce qui nous permet de donner aux diamètres conjugués de l'hyperbole, la même définition que nous avons donnée de ceux de l'ellipse, au N° 43.

77. en conséquence, il serait aisé d'établir, par des raisonnemens exactement analogues à ceux du N° 44 que l'équation aux diamètres conjugués de l'hyperbole, doit être $y = \pm \frac{b'}{a'}\sqrt{x^2 \pm a'^2}$ ---- (A').

on s'assurera aisément de la justesse de cette équation, en en faisant l'application à tous les cas particuliers.

78. le point M étant arbitraire on voit que l'hyperbole aura, comme l'ellipse, une infinité de diamètres conjugués.

Il est à remarquer que les diamètres GG' et HH' sont également conjugués pour les hyperboles CH et CH', comme le démontre l'équation (A'), lorsqu'on y prend le signe supérieur sous le radical ;

Car en y dégageant x, on verra que chaque y considérée comme abscisse relativement aux hyperboles conjuguées, donnera pour les ordonnées x, deux valeurs égales et de signes contraires : ce qui fait voir que le diamètre GG' conduit parallèlement à lui-même deviendrait une tangente au point H ou au point H'.

ainsi, si l'on prend le point M sur les hyperboles conjuguées, et que l'on mène deux cordes supplémentaires, partant des extrémités, respectives $cet\ c'$ de l'axe cc', ces cordes donneront aussi la position d'un système de diamètres conjugués, qui le sera également pour les hyperboles directes BG et AG'.

79. L'équation A' nous donne cette proportion $y^2 : x^2 - a'^2 :: b'^2 : a'^2$

soit $y^2 : (x+a')(x-a) :: b'^2 : a'^2$;

propriété qui peut s'énoncer ainsi ;

Dans l'hyperbole, le quarré d'une ordonnée quelconque, oblique ou rectangulaire, est au produit des deux segmens correspondans du diamètre des abscisses, comme le quarré du demi-diamètre des ordonnées est au quarré du demi-diamètre des abscisses.

80 Problème. étant donné un diamètre quelconque de l'hyperbole, trouver son conjugué ?

Solution. Soit donné le diamètre GG'; on menera une corde quelconque AM, parallèle à ce diamètre; par le milieu d de cette corde, et par le centre o de la courbe, on menera HH' qui sera le diamètre demandé.

81 Corollaire. Il résulte de là un moyen bien facile de mener une tangente par un point donné de la courbe. Soit G le point donné; on menera le diamètre GG', et ayant construit le conjugué HH' il ne restera qu'à faire passer par le point G, une parallèle à HH' (76)

82. Problème. établir dans l'hyperbole un système de diamètres conjugués faisant entre eux un angle donné ?

Solution. Même solution que pour l'ellipse (N° 49).

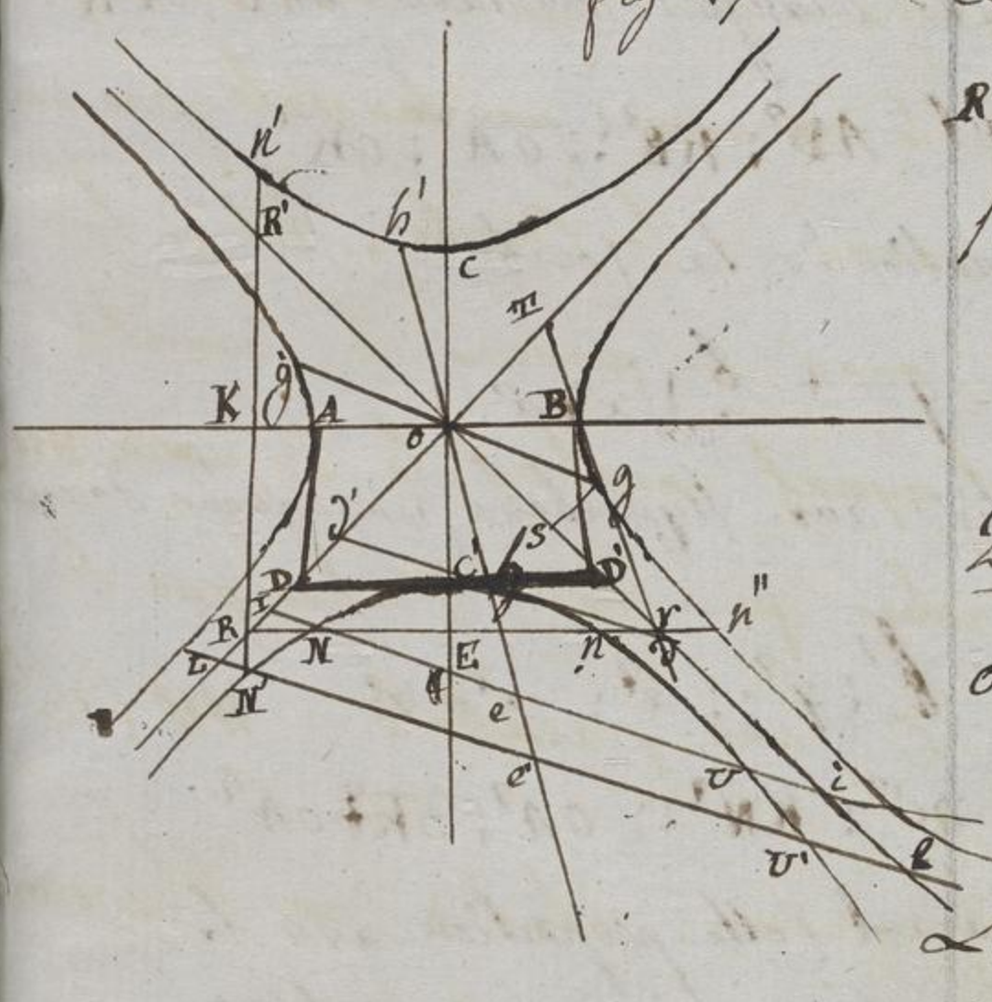
83. problème. trouver le centre d'une hyperbole ?

Solution. Même solution que dans l'ellipse, et applicable indifféremment aux hyperboles directes et aux hyperboles conjuguées (N° 50).

84. Théorème. Si par un point quelconque N ou N' de l'hyperbole, on mène une droite Rr ou N'r' parallèle à l'un des axes AB ou CC', et atteignant les asymptotes aux points R et r, ou aux points R et R', on aura pour l'un et l'autre cas :

$$NR \times Nr = \overline{AO}^2 \text{ ou } N'R \times N'R' = \overline{OC}^2.$$

fig. 26



Démonstration. 1° les triangles semblables OC'D et OER donnent : (fig. 26).

$$\overline{C'D}^2 : \overline{ER}^2 :: \overline{OC'}^2 : \overline{OE}^2 :$$

La nature des asymptotes donne (75) $C'D = AO$.

D'un autre côté, la propriété énoncée au N° 79 nous donne ici

$$\overline{AO}^2 : \overline{EN}^2 :: \overline{OC'}^2 : CE \times C'E \; ;$$

Mais $CE = OE + C'O$, et $C'E = OE - C'O$;

donc aura $\overline{AO}^2 : \overline{EN}^2 :: \overline{OC'}^2 : \overline{OE}^2 - \overline{C'O}^2$.

or la première proportion ci-dessus, en y mettant AO au lieu de C'D, devient

$$\overline{AO}^2 : \overline{ER}^2 :: \overline{OC'}^2 : \overline{OE}^2.$$

Ces deux dernières proportions ayant ainsi mêmes antécédens, nous en déduirons :

$$\overline{ER}^2 : \overline{EN}^2 :: \overline{OE}^2 : \overline{OE}^2 - \overline{C'O}^2$$

d'où $\overline{ER}^2 - \overline{EN}^2 : \overline{ER}^2 :: \overline{OC'}^2 : \overline{OE}^2 :: \overline{C'D}^2 : \overline{ER}^2$.

Ce qui fait voir que l'on a :

$$\overline{ER}^2 - \overline{EN}^2 = \overline{C'D}^2 = \overline{AO}^2 ;$$

or $\overline{ER}^2 - \overline{EN}^2 = (ER - EN)(ER + EN) = NR \times NR'$.

Donc enfin $NR \times NR' = \overline{AO}^2$.

2° Les triangles semblables OAD, OKR donnent $\overline{AD}^2 : \overline{KR}^2 :: \overline{OA}^2 : \overline{OK}^2$;

L'équation de la Courbe

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 + a^2}$$

relative aux hyperboles Conjuguées donne ici

$$b^2 : y^2 :: a^2 : x^2 + a^2$$

ou $\overline{OC'}^2 : \overline{KN'}^2 :: \overline{OA}^2 : \overline{OK}^2 + \overline{OA}^2$

Comparant Cette proportion avec la précédente, qui a mêmes antécédens, on en déduira $\overline{KR}^2 : \overline{KN}^2 :: \overline{OK}^2 : \overline{OA}^2 + \overline{OK}^2$

d'où $\overline{KN'}^2 - \overline{KR}^2 : \overline{KR}^2 :: \overline{OA}^2 : \overline{OK}^2$.

Mais on a plus haut

$$\overline{OA}^2 : \overline{OK}^2 :: \overline{OC'}^2 : \overline{KR}^2 ,$$

Donc $\overline{KN'}^2 - \overline{KR}^2 = \overline{OC'}^2$;

or, $\overline{KN'}^2 - \overline{KR}^2 = (KN' + KR)(KN' - KR) = N'R' \times N'R$:

donc enfin $N'R' \times N'R = OC^2$.

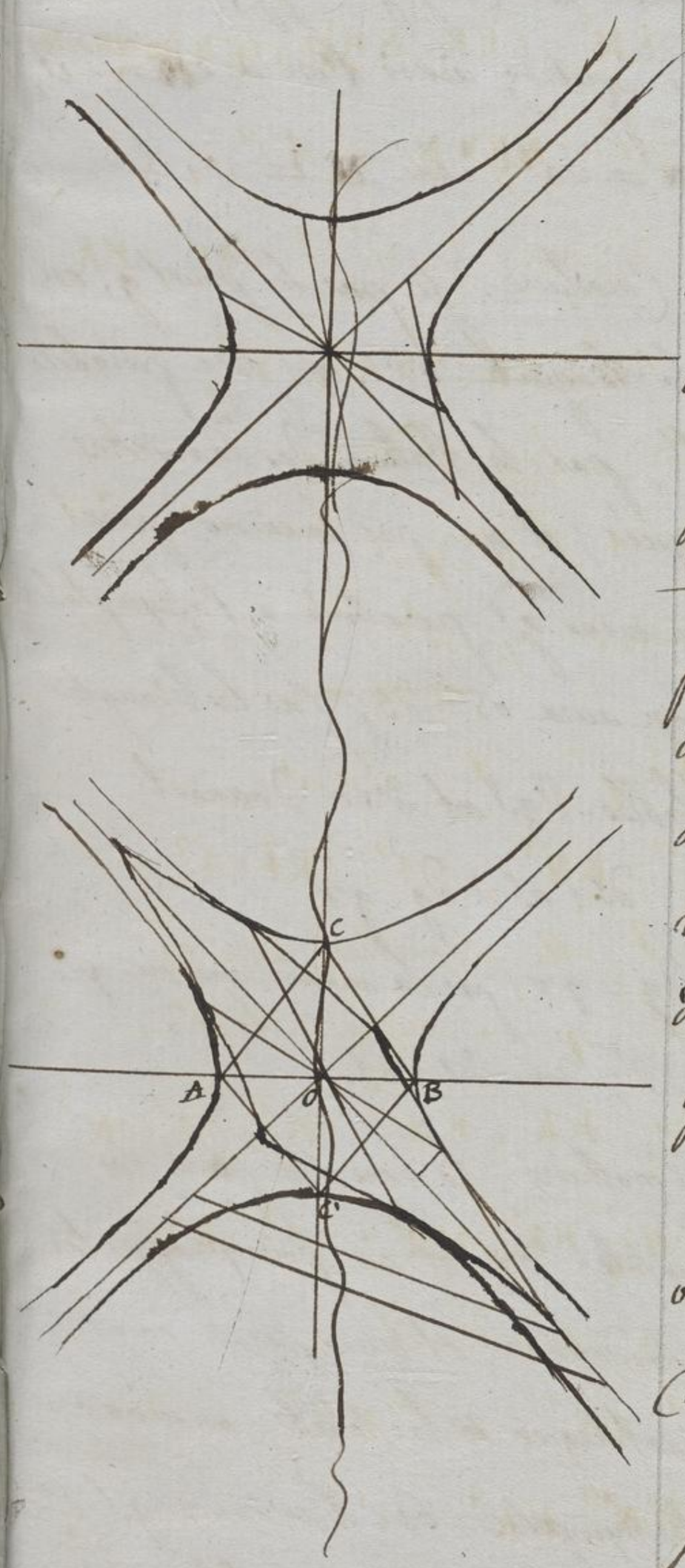
85. La Manière dont nous avons déterminé les asymptotes (75) de l'equation aux axes

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

est applicable à l'equation d'un systeme quelconque de diamètres Conjugués

$$y = \pm \frac{b'}{a'}\sqrt{x^2 - a'^2},$$

et fait voir que l'on aura dans tous les cas $og = hd$, $og' = hd'$, tout Comme l'on a $OA = OB = C'D = C'D'$. de là le Corollaire suivant.



86. Corollaire. Il résulte du théorème précédent, où les propriétés demontrées sont indépendantes de l'angle AOC des axes, auxquels Nous avons rapportés les droites respectives Rr et N'n', que dans un systeme de diamètres Conjugués quelconques, tels que gg' et hh', on aura aussi

$$NI \times Ni = \overline{C'D'}^2 = a'^2$$

ou bien $N'L \times N'l = \overline{C'D'}^2 = a'^2$.

Car les triangles OC'D', OCI sont également semblables.

87. Corollaire. Donc on aura dans tous les Cas, NI = vi, N'L = v'l ;

Car, à Cause de cd = cd', on a ei = eI, el = eL ; Mais le diamètre hh' divise les Cordes Nv, N'v' parallèles au Conjugué gg', en deux parties égales ; ainsi l'on a eN = ev, et eN' = ev' ; donc NI = vi &c.

88. Corollaire. Si par le point g, on mène la tangente dT, qui sera parallèle à hh', par la Nature des diamètres Conjugués, et que par le même point g, on mène gS parallèle à l'asymptote oT, on aura oS = dS ; Car les triangles semblables dgS et dTo donnent

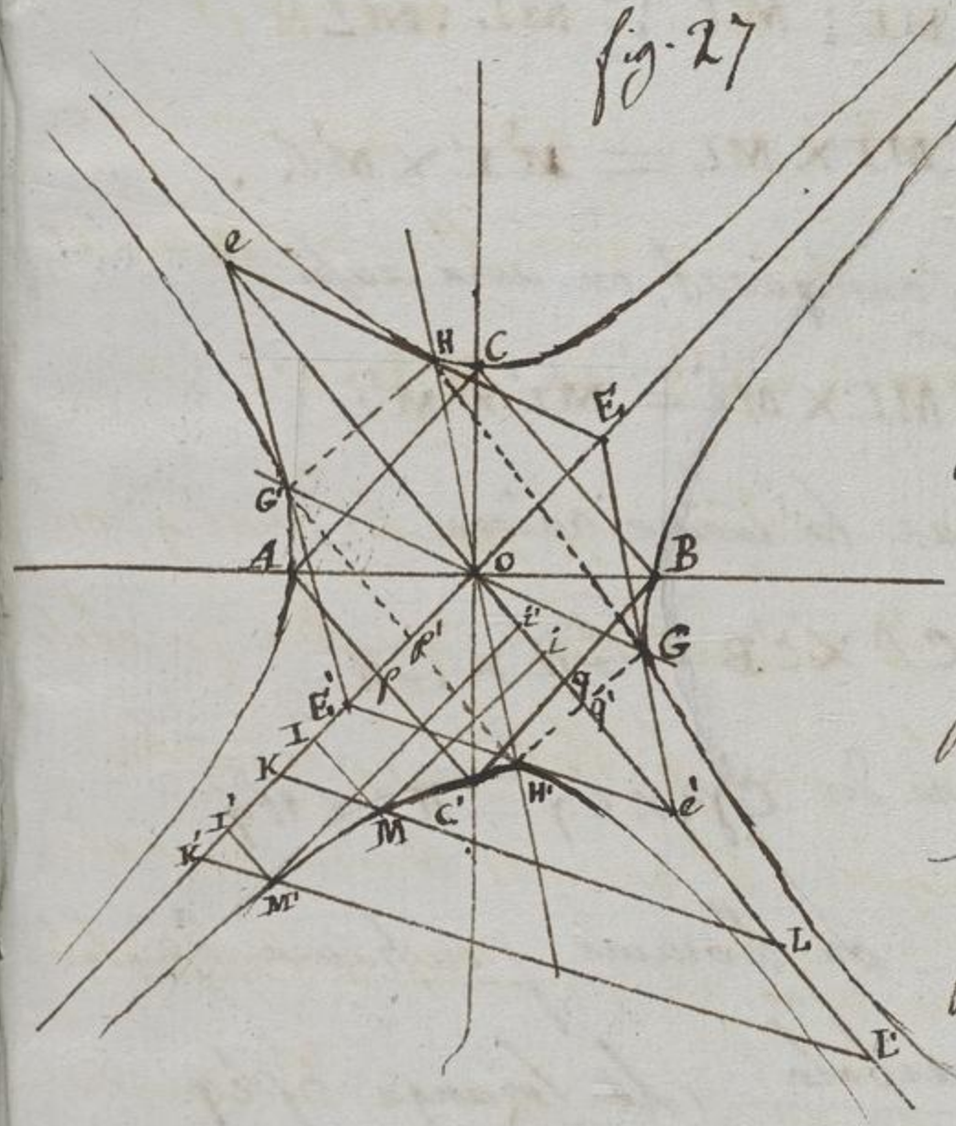
$$dS : oS :: dg : gT$$

Mais dg = gT, par la même raison que c'd = c'd' ; donc dS = oS.

89. Corollaire. Si donc l'on prend les asymptotes oT et oi pour rapporter les Coordonnées, et que par un point g quelconque de la Courbe, on mène sur l'asymptote oi, l'ordonnée gS parallèle à l'autre asymptote oT,

et que par le même point g on mène la tangente dT, on aura la sous-tangente OD égale au double de l'abscisse OS du point de tangence.

Ce qui fournit un Moyen très Commode de mener une tangente à l'hyperbole rapportée aux asymptotes; Car étant donné le point g, on n'aura qu'à mener l'ordonnée gS, et à faire SD = OS; par les points g et D on menera la droite DgT, qui sera la tangente demandée.



9°. Corollaire. Si l'on mène par deux points quelconques M, M' (fig. 27) de l'hyperbole, deux droites parallèles MI et M'I' dans une direction quelconque et terminées à l'asymptote, et deux autres droites ML et M'L' aussi parallèles entre elles, dans toute autre direction et terminées à l'autre asymptote, on aura

$$MI \times ML = M'I' \times M'L';$$

Car nous avons (86)

$$MK \times ML = M'K' \times M'L';$$

d'où $MK : M'K' :: M'L' : ML$.

Mais les triangles semblables MIK et M'I'K'

donnent :

$$MK : M'K' :: MI : M'I' ;$$

substituant donc ce dernier rapport dans la proportion précédente, il viendra

$$MI : M'I' :: M'L' : ML$$

d'où $MI \times ML = M'I' \times M'L'$.

par conséquent, on aura aussi

$$MI \times Mi = M'I' \times M'i'.$$

et par la même raison :

$$C'A \times C'B = G'H' \times GH',$$

à cause de $C'p \times C'q = H'p' \times H'q'$

91. on nomme puissance de l'hyperbole, le lozange $opCq$ déterminé par les asymptotes et les extremités des axes ; on appelle aussi puissance, relativement aux diamètres conjugués GG', HH', le parallelogramme $op'Hq'$ déterminé d'une manière analogue. on vient de voir que ces deux puissances sont egales.

92 1° la puissance $opCq$ est la 4e partie du rectangle que l'on

Construirait sur les axes AB et cc';

2° la puissance $op'tt'q'$ est aussi la 4e partie du parallélogramme $EeE'e'$ formé sur les diamètres conjugués GG' et HH';

d'où résulte cette propriété de l'hyperbole:

<u>Qu'un parallélogramme quelconque formé sur deux diamètres conjugués, est égal au rectangle des deux axes.</u>

<u>92.</u> en prenant les asymptotes pour diamètres de coordonnées, et représentant une abscisse quelconque OI par x, et son ordonnée MI parallèle à l'asymptote Oe, par y, nous aurons

$OI \times MI = xy = \overline{cp}^2$, à cause de $cp = Ap$, et de $Ac' = Bc'$. Mais $cp = \frac{1}{2}Ac' = \frac{1}{2}Ac$;

donc $xy = \frac{1}{4}\overline{Ac}^2$;

De plus $\overline{Ac}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{Oc}^2 = a^2 + b^2$

donc enfin

$$xy = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$$

équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

Chapitre 4.e

De la parabole.

93. Nous avons vu (14) que l'equation de la parabole, relativement à des Coordonnées rectangulaires est

$$y = \sqrt{px} \text{ ---- } A.$$

p exprimant le parametre de la Courbe, c'est-à-dire, le quadruple de la distance du sommet de la Courbe au foyer (17).

Suivant que si A est le sommet d'une parabole, (fig. 28) F son foyer, et que FN soit perpendiculaire à l'axe AB, on aura $Nn = p$, $FN = \frac{1}{2}p$, $AF = \frac{1}{2}FN = \frac{1}{4}p$.

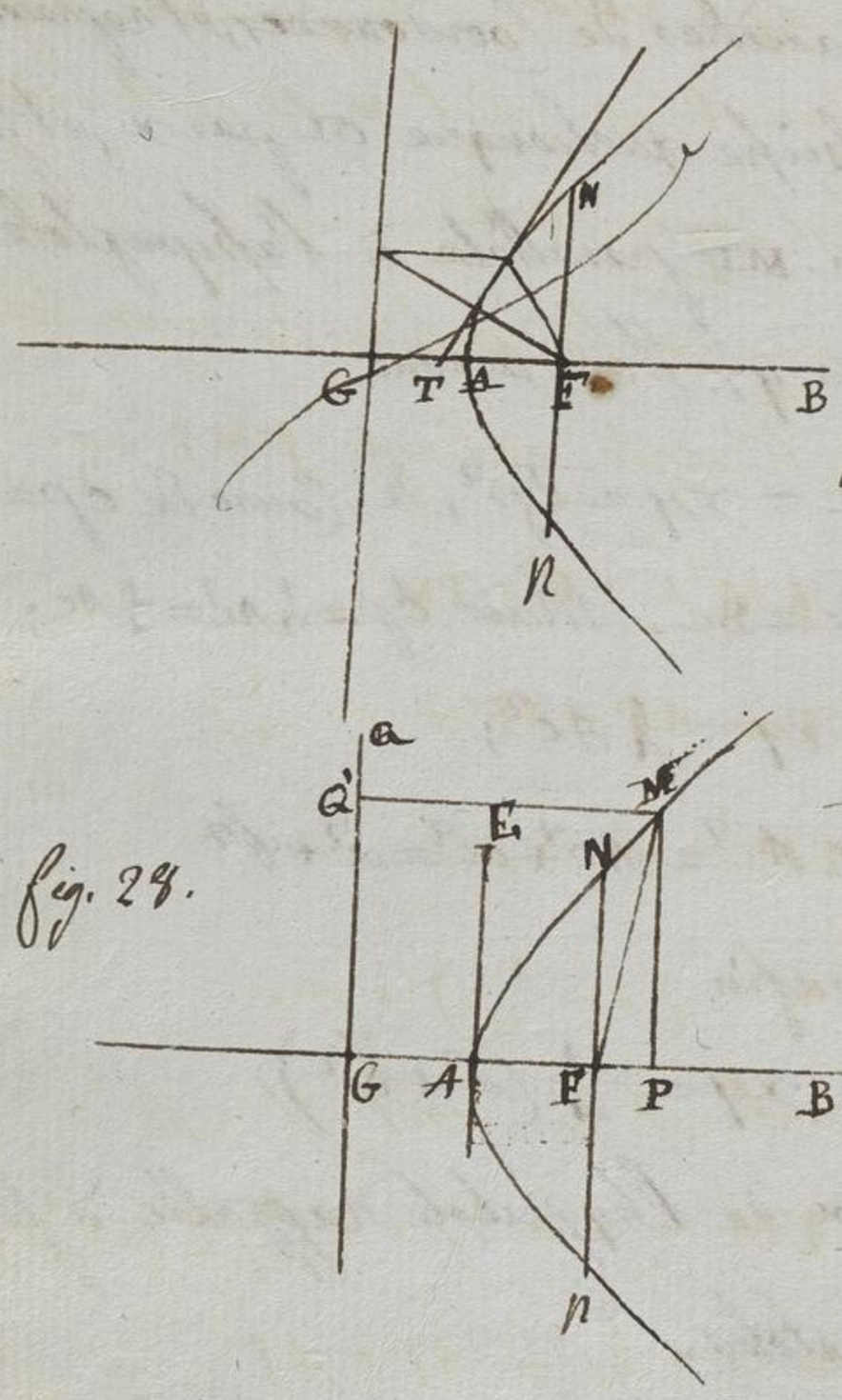


fig. 28.

94. On voit, par la Nature de l'equation (A), que plus on augmentera la valeur de x, plus l'ordonnée y augmentera; ainsi rien ne limite la Courbe du Coté de B, et ses branches s'ecartent à l'infini de son diametre AB.

Si l'on fait $x = 0$, on aura $y = \pm 0$, ce qui indique le passage de la Courbe sur

le diamètre au point A, et qu'une droite telle que AE, passant par le sommet A, perpendiculairement à AB, est une tangente au point A.

Si l'on prenait une abscisse négative, l'ordonnée y deviendrait imaginaire : ce qui signifie que la Courbe ne saurait exister du Côté de C.

95. toute droite FM tirée du foyer F à un point quelconque M de la Courbe, se nomme rayon vecteur. la parabole n'ayant qu'un sommet, un point M ne peut avoir qu'un seul rayon vecteur.

Déterminons l'expression du rayon vecteur FM. le triangle rectangle FMP nous donne $\overline{FM}^2 = \overline{FP}^2 + \overline{PM}^2$;

Mais $FP = AP - AF = x - \frac{1}{4}p$

et $PM = y = \sqrt{px}$

d'où $\overline{FM}^2 = (x - \frac{1}{4}p)^2 + px$

développant, et réduisant, il reste

$$\overline{FM}^2 = x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2 = (x + \frac{1}{4}p)^2$$

d'où $FM = x + \frac{1}{4}p = AP + AF$.

Si donc on porte sur le prolongement de AB, au dehors de la Courbe, une partie

$AG = AF = \frac{1}{4}p$, on aura

$$GP = x + \frac{1}{4}p$$

donc $FM = GP$.

96. si au point G on élève une perpendiculaire GQ, que nous démontrerons être la directrice de la parabole, et que du point M on mène MQ' parallèle à AB, on aura $FM = MQ'$, à cause de $MQ' = GP$.

propriété remarquable qui s'énonce en ces termes :

Dans la parabole, le rayon vecteur d'un point quelconque de la courbe est égal à la distance de ce même point à la directrice.

Construction de la parabole.

97. étant donnés le sommet A et le foyer F, on joindra ces deux points par l'axe indéfini GB ; on fera $AG = AF$, prenant pour rayon vecteur une ouverture de compas à volonté, on décrira du foyer F, un arc de cercle, portant le rayon vecteur FM, de G en P, on élèvera du point P,

l'ordonnée rectangulaire PM, qui coupant l'arc de cercle au point M, déterminera ainsi un point de la courbe, &c.

98. faisons $FP = x'$, et $FM = z$; Nous avons déjà $z = x + \frac{1}{4}p$; faisons pour abréger $AF = \frac{1}{4}p = c$, d'où $z = c + x$; or $AP = AF + FP = c + x'$; et puisque $x = c + x'$, on aura donc $z = 2c + x'$.

désignons par φ l'angle AFM, d'où $\cos MFP = -\cos\varphi$; le triangle rectangle MFP nous donne:

$$R : \left\{\begin{matrix}\sin FMP \\ \cos MFP\end{matrix}\right\} :: z : FP$$

Mettant les valeurs, il vient:

$$1 : -\cos\varphi :: z : x'$$

d'où $x' = -z\cos\varphi$.

substituant cette valeur de x' dans l'expression de z, on aura $z = 2c - z\cos\varphi$

d'où $z = \frac{2c}{1+\cos\varphi}$

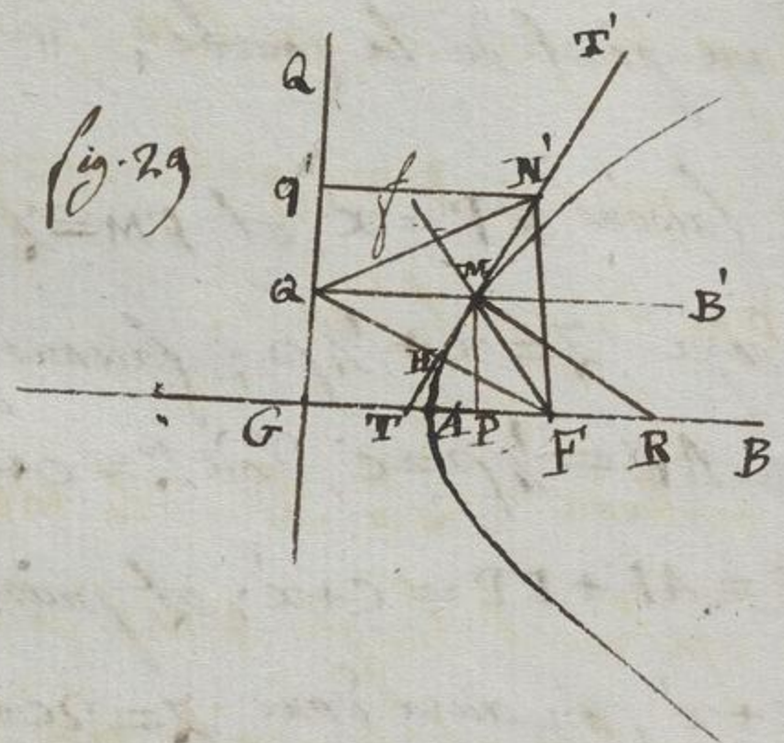
équation polaire de la parabole.

99. problème. par un point M de la parabole, mener une tangente à la courbe?

solution. Menez le rayon vecteur FM, et

fig. 29.

fig. 29



La droite MQ perpendiculaire à la directrice; tirez FQ, et sur FQ abaissez la perpendiculaire MH, qui sera la tangente demandée. Car soit, s'il est possible un autre point N' de cette droite, qui appartienne aussi à la Courbe; Menez N'Q, N'F et la perpendiculaire N'q sur la directrice. la Nature de la parabole Nous donne et nous doit donner (6) MF = MQ; on devrait donc aussi avoir N'F = N'q, Ce qui N'est pas possible, Car on a par Construction N'F = N'Q; Mais N'Q > N'q; donc on a ici N'q < N'F.

100. Corollaire. Les angles TMF et T'MB' sont égaux, MB' étant parallèle à AB; Car les angles TMQ et TMF sont égaux (99); or TMQ = T'MB'. Ce qui s'énonce ainsi; la tangente fait avec le rayon et l'axe de la Courbe, deux angles égaux; à Cause de T'MB' = MTB.

101. Corollaire. le triangle TMF

est isocèle, et donne FT = FM ; Ce qui fournit un moyen bien commode de mener une tangente par un point M, puisqu'on n'a qu'à prendre FT égale au rayon vecteur FM du point donné.

102. Corollaire. La Normale MR divise en deux également l'angle FMB' formé par le rayon vecteur et la droite MB' parallèle à l'axe AB ; Car de chacun des deux angles droit TMR, T'MR, retranchant respectivement TMF = T'MB', les restes seront égaux.

103. Corollaire. La tangente MT' divise en deux également l'angle fMB' formé par la parallèle aB' à l'axe et le prolongement Mf du rayon vecteur ; Car fMT' = FMT.

104. Corollaire. La sous-tangente PT vaut le double de l'abscisse AP du point de tangence ; Car on a (95) :

$$FM = c + x ;$$

Mais (101) FT = FM, donc

$$FT = c + x ;$$

or

$AT = ET - AE = (c+x) - c = x$.

donc $ET = 2x$.

Nouveau Moyen de mener une tangente par le point M, en faisant ~~AT = AP~~.

<u>105.</u> La sousnormale PR vaut $\frac{1}{2}p = 2AF$; Car on a, en vertu du triangle rectangle TMR,

$$PR = \frac{\overline{PM}^2}{PT} = \frac{px}{2x} = \frac{1}{2}p.$$

<u>106. problème</u>. D'un point donné hors de la Courbe, mener une tangente à la parabole.

<u>Solution.</u> Soit donné le point N' ; fig. de ce point comme Centre et avec un rayon égal à N'F on décrira un arc de cercle qui Coupera la Directrice au point Q ; faisant passer par ce point Q une droite QB' parallèle à l'axe AB, Cela déterminera sur la Courbe un point M qui étant joint avec le point N' donnera la tangente demandée.

en effet, le point M étant sur la Courbe donne QM = MF', et Comme par

Construction $N'F = N'Q$, il s'ensuit que la droite TT' a tous ses points également éloignés des points Q et F; or en vertu du N.° 99, une telle ligne perpendiculaire à QF, est tangente à la Courbe.

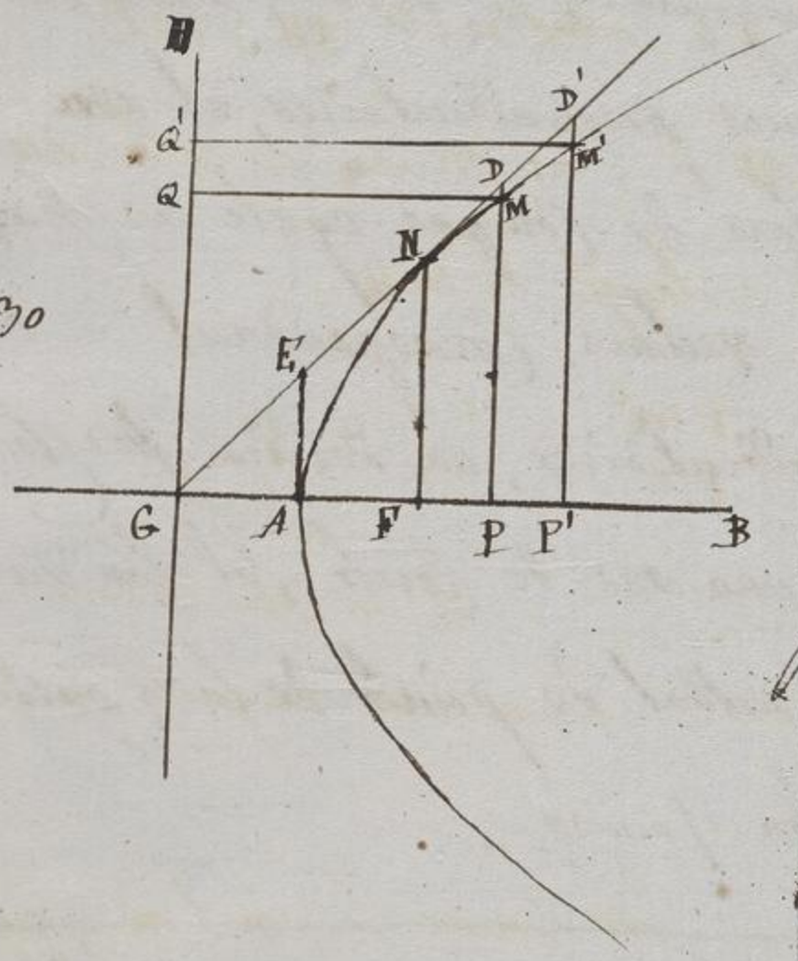


fig. 30

107. Vérifions si la Directrice coupe dans la parabole une place analogue à la Nature de cette Courbe comme dans les autres. (fig. 30).

Le demi paramètre $FN = 2c$; de même la soutangente $FG = 2c$, d'où $FN = FG$. ayant élevé la perpendiculaire AE, les triangles semblables GAE, GFN nous donneront par conséquent $AG = AE$: Caractère de la parabole que nous avions annoncé au N.° 38.

108. Il est facile d'après cela d'avoir la valeur de AE; Car, $AE = AG = AF = c$.

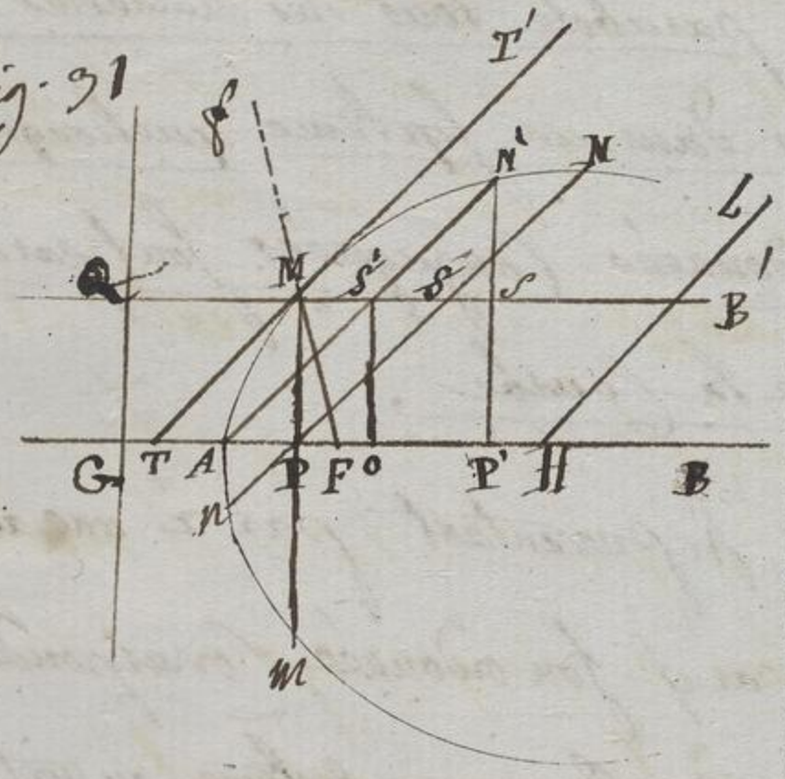
Les triangles GAE, GFN, GPD, $GP'D'$, sont tous semblables et isocèles à cause de $GE = FN$, donc $GP = PD$, $GP' = P'D'$; de plus, la Nature de la parabole, nous donne $FM = QM$, $FM' = Q'M'$, il s'ensuit donc que $FM = PD$, $FM' = P'D'$: C'est à dire, que chaque perpendiculaire PD, $P'D'$ est égale au rayon vecteur qui lui correspond.

109. Cela nous fournit un Moyen de Construire une parabole lorsque l'on Connait le foyer et le sommet: pour Cela, ayant élevé la perpendiculaire AE = AE' = ~~AE'~~ on tirera la droite GE qui sera tangente à la Courbe; abaissant plusieurs perpendiculaires, et avec une ouverture de Compas égale à Chaque rayon vecteur Correspondant à ces perpendiculaires, on decrira par Chacune d'elle une arc de Cercle, et l'on aura ainsi autant de points de la Courbe que l'on voudra.

De La Parabole Rapportée à ses Coordonnées obliques.

110. Soit un point M, par lequel on menera la tangente MT et la parallèle MB' à AB; par le point A on fera passer une ligne AN' parallèle à la tangente. (fig. 31). dans Cet état de Choses, Nous démontrerons que la Coide AN' est partagée en deux parties égales au points

fig. 31



Abaissant les perpendiculaires $S'O$ et $N'P'$, on aura les triangles semblables $AS'O$ et $AN'P'$ qui nous donneront.

$$AO : AP' :: S'O : P'N' ;$$

observons que l'on a $AT = S'M = PO = AP$, par conséquent $AO = 2AP$, la proportion devient donc :

$$2AP : AP' :: S'O : P'N' . \quad \text{---} (A)$$

Mais en vertu du N.° 13 nous avons

$$\overline{S'O}^2 : \overline{N'P'}^2 :: AP : AP'$$

ou $S'O : N'P' :: \sqrt{AP} : \sqrt{AP'}$

Cette dernière proportion ayant un rapport de commun avec la proportion (A) on aura :

$$\sqrt{AP} : \sqrt{AP'} :: 2AP : AP',$$

ou $AP : AP' :: 4\overline{AP}^2 : \overline{AP'}^2$,

alternant $AP : 4\overline{AP}^2 :: AP' : \overline{AP'}^2$,

d'où $AP' = 4AP$.

ainsi $AO = \frac{1}{2}AP'$; et à cause des triangles semblables $AS'O$, $AP'N'$ on a enfin $S'O = \frac{1}{2}N'P'$, et $AS' = S'N'$. H

H par conséquent la ligne MS' et la tangente MT indiquent la direction des coordonnées obliques relatives au point M pris pour leur origine.

III. ~~Le point M ayant été pris d'une~~

~~Manière arbitraire~~, il s'ensuit que dans la parabole ~~tous~~ les diamètres des abscisses dans un système quelconque de Coordonnées Conjuguées sont parallèles l'axe de la Courbe.

112. Représentant par x' une abscisse M.S', et par y' son ordonnée Correspondante S'M', dans Ce Nouveau système, on voit que Chaque abscisse devant donner deux ordonnées égales et de signes Contraires, et le point M devant donner $y' = \pm 0$, il est facile de voir que l'équation de la parabole qui doit exprimer la relation entre les Nouvelles Coordonnées, doit être de la forme

$$y' = \sqrt{p'x'},$$

puisque les résultats sont analogues à Ceux que donnent les Coordonnées rectangulaires dont l'origine est au point A. on voit en effet que si l'on y fait $x' = 0$, on aura $y' = \pm 0$; et qu'à Chaque valeur de x' Correspondront deux valeurs égales et de signes Contraires pour y'; enfin, que rien ne limitant la valeur

qu'on peut donner à x', les deux branches de la Courbe s'écarteront à l'infini du diamètre MB'.

Le Choix du point M étant arbitraire, il y aura dans la parabole, Comme dans les autres Courbes, une infinité de systèmes de Coordonnées Conjuguées.

Chaque diamètre d'abscisses, dans la parabole, Comme dans les autres Courbes, a un paramètre p', qui se détermine de la même Manière; Car si dans l'équation Ci-dessus, on prenait une abscisse $x' = \frac{1}{4}p'$ (voyez le N.° 16), on aurait $y' = \frac{1}{2}p'$.

L'équation $y = \sqrt{p'x}$ donne

$$p' = \frac{y^2}{x}$$

Ce qui fait voir que dans la parabole, le paramètre est en général une 3.e proportionnelle à une abscisse quelconque et à l'ordonnée Correspondante.

113. <u>Problème</u>. étant donné un diamètre d'abscisses dans la parabole,

tel que MB', trouver la position des ordonnées obliques relatives à ce Diamètre ?

Solutions diverses : 1.° Menez une tangente par le point M, et les nouvelles ordonnées NS, N'S', devront être parallèles à cette tangente.

2.° portez AP sur ~~AB~~ MB', en faisant MS' = AP, et tirant AS', on aura l'inclinaison demandée, à cause de MS' = AP = AT.

3.° faites AP' = 4AP ; élevez P'N', et tirez AN', qui résoudra le problème, car on aura

$$\overline{PM}^2 : \overline{P'N'}^2 :: AP : AP' :: 1 : 4$$

d'où PM : P'N' :: 1 : 2

or PM = OS' ; donc OS' = ½ P'N' ; donc P'S = SN', d'où AS' = S'N'.

4.° prolongez le rayon vecteur FM vers f ; divisez l'angle gMB' en deux également par MT', qui donnera l'inclinaison demandée. (109).

114. problème. Etablir dans la parabole un système de Coordonnées faisant entre elles un angle donné ?

Solution. établissez sur quelqu'un ~~de~~ des points de l'axe l'angle donné AHL ; Menez dans l'intérieur de la Courbe une Corde quelconque Nn parallèle à HL, et ayant divisé Nn en deux parties égales au point S, par Ce point on fera passer MB' parallèle à l'axe AB ; et le point M sera l'origine des Coordonnées Cherchées.

115. problème. étant donné un arc de parabole, trouver son axe et son foyer ?

Solution. on Menera dans Cet arc deux Cordes quelconques Nn, N'A parallèles entre elles ; ayant pris les Milieux respectifs S, S' de Ces deux Cordes, on menera par Ces deux points la droit MB', qui sera un diamètre d'abscisses,

on Menera ensuite une Corde quelconque Mm perpendiculaire sur MB' ; on en prendra le Milieu P, et par Ce point on menera la droite AB parallèle à MB' ; AB sera l'axe de la Courbe.

on fera faire un angle T'Mf egal à T'MB'; et prolongeant fM au dedans de la Courbe, jusqu'à la rencontre F' de l'axe, MF' sera le rayon vecteur, et F' le foyer (103).

116. Théorème. La parabole peut être envisagée comme une ellipse dont le grand axe est supérieur au dessus de toute ligne assignable, quelque grande qu'on la suppose.

Démonstration. L'equation de l'ellipse rapportée à son sommet et à ses axes rectangulaire, est

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

or nous avons vu que $b^2 = a^2 - c^2$ d'où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ (N° 24); si l'on désigne par c' la distance du sommet de la Courbe au foyer, on aura

$$c' = a - c,$$

c étant, comme l'on sait, l'excentricité, Mettant ici la valeur de c indiquée

Ci-dessus, on aura

$$c' = a - \sqrt{a^2 - b^2}$$

d'où $b^2 = 2ac' - c'^2$.

Mettant cette valeur de b^2 dans l'équation de l'ellipse, elle deviendra d'abord

$$y^2 = \frac{(2ac' - c'^2)}{a^2}(2ax - x^2)$$

Le second Membre peut se mettre sous la forme suivante :

$$y^2 = 4c'x - \frac{2}{a}(c'x^2 + c'^2x) + \frac{c'^2x^2}{a^2};$$

équation qui tendra de plus en plus à se réduire à

$$y^2 = 4c'x$$

à Mesure que a sera de plus en plus grand, et si enfin a était tellement grand qu'il fût au dessus de toute quantité assignable, il serait permis de Négliger les deux derniers termes de la valeur de y^2, et alors on aurait en effet $y^2 = 4c'x$,

équation qui est précisément celle de la parabole, puisque c' étant la distance du sommet au foyer, on aura $p = 4c'$ (93).

M5 1.8.5
N1270157